偏微分コメンタール

（ccfonts, eulervm パッケージを利用してみた．）

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

初稿 2015 年 2 月 22 日
revised 2022 年 8 月 1 日

概要

本稿は，偏微分の定義は所与のものとして，その操作についてのコメントを記したものである．

そもそもは，拙著「変換・不変・共変教室 —- 関数と変数変換に焦点をあてて（https://www.hisasima.jp/studynote/invariant.pdf)」の付録として書いたものであったが，筆者自身よく参照するので，pdf としてここに独立させたものである．その際，記述のおかしなところなど気のつく範囲で若干の修正を施した．

1 偏微分と微分の形式的類似性，非類似性

変数 x, y, t が完全に独立な場合から始める．関数 $f(x, y, t)$ の全微分は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

であたえられる．また変数の独立性から $dy/dx = 0$, $dx/dt = 0$ などであるから，上の全微分の式より，形式的に

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

が成り立つ．おのおのの等号の右辺は偏導関数という名称で馴染んでいる．左辺は「完全導関数」と言われることもある[*1]．

上記の偏導関数は一般に x, y, t を変数に持つ[*2]．したがって，例えば $\partial f/\partial x$ の全微分をとると，

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dx + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dy + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dt$$

であり，全く同じ理路で

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

となる（偏導関数 $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial t$ についても同様）．これで見るように，変数がおのおの完全に独立である場合には，ことは単純である．

次に，変数が $x(t)$, $y(t)$, t である場合を考えよう[*3]．関数 $f(x(t), y(t), t)$ の全微分はやはり同様にあらわすことができて，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

となるけれども，$x = x(t)$, $y = y(t)$ であることを考慮すれば，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

[*1] 「時間の完全導関数 df/dt においては…」のような使われ方をされることがある．

[*2] 例えば，$f(x, y, t) = (xyt)^2$ の時，$\partial f/\partial x = 2x(yt)^2$ である．x で偏微分したからと言って，必ず x だけの関数になるわけではない．$f(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2$ の時は，$\partial f/\partial x = 2x$ で一見 x のみの関数になっているが，これは特殊な場合であるとみなせば良い．

[*3] この変数の形式は，t が時間，$x(t)$, $y(t)$ が運動あらわすと解釈すれば，物理でおなじみのものである．

となって

$$\frac{df}{dt} \neq \frac{\partial f}{\partial t}$$

になる．つまり，この場合には時間の偏導関数と完全導関数は一致しないのである．

x について考えてみると，x と y は独立なのであるから

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dx}$$

となる．x と t の間には $x = x(t)$ という関数関係があるので dt/dx が 0 であるとは一概には言えない．それゆえやはり，x の偏導関数と完全導関数は一般には一致しないことになるのである．

偏導関数の偏導関数は，一見したところややこしく見えるので，確認の意味も込めて記しておく．先にみたように，$\partial f/\partial x$ の全微分は

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dx + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dy + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dt$$

であるから，時間の完全導関数は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} \frac{dx}{dt} + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

となる．

ここまでの事柄をより多くの変数にまで拡張しておこう．$f(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), t)$ を考えると，

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

であるから

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

さらに，

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) &= \left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_1 + \left\{\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_2 + \cdots + \left\{\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_n + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_i + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dt \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) .$$

2 偏微分の chain rule

2.1 全微分の同値性（不変性）

□ 1変数関数の場合

まず最初に, $f(u)$, $u = u(x)$ という合成関数を考える．このとき $df = (df/du)\, du$ であり, かつ, $du = (du/dx)\, dx$ であるから,

$$df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} dx$$

となる．これは合成関数の chain rule そのものを示したものである．ここで合成関数というものに少し立ち入って見ると，ここで考えた関数 f は，最終的には x のみを変数と持つ関数であると捉えることができる．それが変数変換

$u=u(x)$ をほどこされて f を形作っている．変数変換を伴っているから，最終的に x の関数と見立てた場合には，その関数形は異なっているだろう．関数形が異なれば，微分演算の結果も異なるのではと想像される．

今，$f(u)$ において，$u=u(x)$ という変数変換をほどいて，最終的に x を変数とした場合の関数形を，$\bar{f}$ であらわすことにすると，f と $\bar{f}$ の関係は，

$$\bar{f}(x)=f(u(x))$$

ということになる[*4]．両辺の x による導関数を計算すれば

$$（左辺の導関数）=\frac{d\bar{f}}{dx}\,,\quad（右辺の導関数）=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

したがって

$$\frac{d\bar{f}}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

となる．そしてここで，技巧的ながら，dx を上の結果の両辺にかけると

$$\frac{d\bar{f}}{dx}dx=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx \;\therefore\; \frac{d\bar{f}}{dx}dx=\frac{df}{du}du \;\therefore\; d\bar{f}=df$$

となり，f と $\bar{f}$ の全微分が同値（不変）であることがわかる．したがってこの結果から，

変数変換で結ばれている 2 つの関数においては，各々の関数の全微分は等しい（同値または不変）

ということがわかる．これからはこの結果を数学的事実[*5]として利用してゆこう．

この結果は，f を最終的に x の関数と見立てた際の導関数（すなわち，$\bar{f}$ の導関数）と，合成関数の chain rule から求めた導関数は等しい，ということを保証するものでもある．それゆえ，一般に，

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}\quad\left(ただし，u=u(x)\right)$$

と書かれるのである．

□ 多変数関数の場合

多変数関数の場合も，やはり，変数変換で結びついている場合は全微分は等しいという事実がなりたつ[*6]．２変数関数 $F(u_1,u_2)$，$u_1=u_1(x_1,x_2)$, $u_2=u_2(x_1,x_2)$ で考えると，各々の全微分は，

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial F}{\partial u_2}du_2\,,\qquad \begin{cases} du_1=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 \\ du_2=\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 \end{cases}$$

[*4] 写像的な表記をもちいると，まず $u:x\mapsto u(x)$ と $f:u\mapsto f(u)$ をあわせて

$$\left\{u:x\mapsto u(x),\ f:u(x)\mapsto f(u(x))\right\} \iff \bar{f}:x\mapsto\bar{f}(x)$$

ということになる．または，関数合成をあらわす記号「∘」を導入して書いてみれば

$$\left\{f(u(x))=(f\circ u)(x)=\bar{f}(x)\right\} \iff f\circ u=\bar{f}\,.$$

[*5] この事実は，一見当たり前のように思えるのだけれど，きちんとまともにやろうとすると，大掛かりな仕掛けが必要なのではないかと想像している．そうでもないのだろうか？

また，この全微分が不変ということに暗黙に裏打ちされたものとして，物理の世界の関数の書き方の鷹揚さがある．たとえば，３次元空間のポテンシャル関数 $U(x,y,z)$ において，この座標変数 x,y,z を極座標変換して r,θ,ϕ であらわせば，当然関数形も異なるので，$\overline{U}(r,\theta,\phi)$ または $V(r,\theta,\phi)$ などと書くのが礼儀正しいはずである．しかしながら，通常はそのようなことはせず，$U(r,\theta,\phi)$ などとそのままの記号で記されることが多い．これは取りも直さず，全微分が不変であるから「そんな細かいことは気にしなくても微分演算には影響はない，ノープロブレム」ということの表明なのであるのだろう．

[*6] １変数の場合の結果をなんの躊躇も無く多変数の場合にも拡張しているが，これはうまくないはずである．１変数の場合には，上で書いたように，まず chain rule の存在があってそれをもとにして全微分の同値性（不変性）が形式的にせよ導出できたのだった．しかしながらここでは，わたくしは，多変数関数の chain rule を全微分の不変性から求めようとしている．理路の出発点と方向が違っているのである．１変数関数の場合を無邪気に援用しているのは，やはり良くないのだろうなぁ．

ということは，chain rule を用いずに全微分の同値性（不変性）を示さねばならないということか…

であるから

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 .$$

一方，F は最終的には，x_1，x_2 の関数であるから，その関数形を $\overline{F}$ (i.e. $\overline{F} = \overline{F}(x_1, x_2)$) とすると，

$$d\overline{F} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_2} dx_2$$

であり，この両者の全微分は等しいことを認めたので $d\overline{F} = dF$ でなければならない．したがって，dx_1, dx_2 係数は等しいことが要請されて

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

となり，一般的にはもとの関数記号 F が採用されて

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

とあらわされる．

2.2 偏微分の chain rule

準備はほぼ終わっていて，上で用いた $F(u_1, u_2)$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ の場合を再確認すると

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 ,$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

である．これが典型的な chain rule．より一般的な場合として，$F(u_1, \ldots, u_n)$, $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_m)$ のときには，

$$dF = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i \right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} .$$

少し毛色の変わった $F(u)$, $u = u(x_1, x_2)$ という場合には，

$$dF = \frac{dF}{du} du = \frac{dF}{du}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2\right\} = \left(\frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_2} .$$

なお，この dF/du は往往にして，$\partial F/\partial u$ と書かれることもある．他に独立な変数がないので，d でも ∂ でも実際の計算結果に差がない，というのがその理由なのかもしれない．

3 微分，偏微分の演算子化

再び合成関数 $F(u)$, $u = u(x)$ を考える．F の全微分は，$dF = (dF/du)(du/dx)\,dx$ となる．これを演算子化する．任意の関数 $F(u)$ について成り立つことから，最終的に F を省く操作を行うのである（演算子化）．道筋は次の通り：

$$\left\{ dF = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} dx \iff \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} \iff \frac{dF}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dF}{du} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{d}{du} .$$

2 変数関数 $F(u_1, u_2)$，$u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ を考えて，上の微分の演算子化と同様に，偏微の演算子化を考えてみる．理路はほとんど同じである．各々の全微分は,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} du_2 \ , \qquad \begin{cases} du_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ du_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \end{cases}$$

であるから

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_2 \ .$$

一方，F は最終的には，x_1，x_2 の関数であり，関数形は違うかもしれないが全微分は等しいという事柄から，$F = F(x_1, x_2)$ として操作しても問題はないことを前に見た．それゆえ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2$$

となってしたがって,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \ .$$

これを演算子化すれば,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial u_2} \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \ .$$

n 変数関数（$F(u_1, \dots, u_n)$, $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$）への拡張は容易いので，結果だけを記す：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_k} \ .$$

4 高階偏微分の特徴

4.1 偏微分の順序交換

一般には，偏微分は順序交換できるとは限らないが,

> 関数 $f(x, y)$ において $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ が存在し，かつこれらが連続関数であるとき,
>
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
>
> が成立する．

ということは言える．この件については，「逆」は成り立たない（等しくても，連続関数であるとは限らないから）．そして，偏微分が可換となる十分条件は他にも色々あるようだけれど，実用上はこれが一番有用であろう．ほとんどの普通の関数はこの十分条件，すなわち「存在して連続関数であること」を満たすからである．

実際に計算を行ってみると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\partial f(x + \Delta x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left\{ \lim_{\Delta y \downarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left(f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) \right) - \lim_{\Delta y \downarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left(f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \right) \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \lim_{\Delta y \downarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \{ f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) \} \end{aligned}$$

であり，同様にして

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\} \\
&= \lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right)-\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right)\right\} \\
&= \lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)\}
\end{aligned}
$$

となる．この計算においては偏導関数の存在はすでに前提とされているので，この 2 つの極限 $\lim_{\Delta x\downarrow 0}$ と $\lim_{\Delta y\downarrow 0}$ との順序が交換できれば

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

となる．そしてこの順序交換ができるということは連続関数であるということを意味している．したがって，上の十分条件が満たされていることになり，その時にはこの計算のように，偏微分の順序を交換しても等しい，と結論づけられるのである．

4.2　演算子法のさわり

ここでは実用上必要になることが多いほんのさわりのみについて述べる．演算子法が成立する背景とその理論については教科書にあたるべきである．

□ 記法の約束

関数 f に対して x で 2 回偏微分する，という操作は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

と書くのが由緒が正しい．そしてこれらは，場面に応じて次のようにもかかれる：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f\,.$$

さらにこれから偏微分演算子のみを取り出して，次のようにも書く：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\,.$$

同様にして，x で偏微分し，その後に y で偏微分するという操作も

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f$$

とあらわせて，演算子のみの形にすれば

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

となる．

□ 代数化

上のような流儀で偏微分の演算子を用いることにより，高階偏微分について，代数的な演算を利用することができるようになる．例えば何らかの計算によって

$$\frac{\partial}{\partial x}=\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial}{\partial\eta}\quad(\alpha,\beta\text{ は定数})$$

と求まったとすると，

$$\frac{\partial^2}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 = \alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2 + 2\alpha\beta\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \beta^2\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2$$
$$= \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta} + \beta^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

というような計算が可能になり，高階偏微分 $\partial^2/\partial x^2$ を求めることができるのである．この代数化による変形は，重宝されるものである．