変換・不変・共変教室 —- 関数と変数変換に焦点をあてて

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

初稿 2018/11/25
revised 2019/05/02

Contents

プロローグ

物理の方面でよく目にする言葉で，「A 変換に対して不変」「B 変換に対して共変」というものがある．また，「C 変換を施しても形式は変わらない」とか「D 変換では物理法則は変わらない」というものもある．

この不変性や共変性，形式の同一性などは，様々な計算を行って導出されるのであるけれど，実際にやってみると，どうもその計算の渦に埋もれ，単に式変形をしてこうなったという感が強く，そもそも何を示したかったのかということがピンとこなくなることが，ままある．

山本・中村の解析力学の教科書 [6] の p.123 の脚注に，点変換のもとでのラグランジアンの不変の定義が書いてあり，そこでは

> とくに $L^*(Q,\dot{Q}) = L(Q,\dot{Q})$ すなわち $L(\Phi(q),\dot{\Phi}(q)) = L(q,\dot{q})$ のとき，ラグランジアンはこの変換に対して不変（invariant）といわれる．

と記述されている．わたくしにはこの「すなわち」が難解であった．それをきちんと理解したいという気持ちがあった．

そういう個人的な事情が本稿執筆の動機のひとつである．

とはいえ，変換といっても色々な変換があるのも事実であって[†]，かつ，それら各々には独特の意味と概念があるのもまた事実である．なかなかいっぺんに全部，というわけにもいかない．

そこで，まず変数変換に焦点をあて，その変換のもとでの関数の形の変化 —不変性と共変性— を見直してみた．

変数変換は往往にして微分積分での計算を簡便にする処方として使われるけれど，その計算実際においてはあまり対象の関数形に注意を払わない．変数変換を施すことによって関数形は様々に変化し，最終的に手際よく計算ができる形となって，目的が達せられる．目的がそこにあるのだからそれは十分正当な話である．

一方，関数形に注意を払うと，変数変換を施しても変数を変えただけで形式が変わらないものもあり，また，変数変換と結びついたなんらかの規則によって変形されていくような場合もある．

本稿は，変数変換を土台として，関数形のどのような場合にいかようにに変化するのかを捉え整理することを目指している．その際の題材や実例としては物理方面からの題材を用いた（ローレンツ変換，電磁気学，ラグランジアンなど）[‡]．計算もなるべく端折らずに詳細に書くように努めた．

[†] フーリエ変換，ラプラス変換，ルジャンドル変換，ゲージ変換，点変換，正準変換$\cdots$，枚挙にいとまがない．

[‡] 物理的な意味については深入りは避けた．それらを明晰に説明することは本稿のレベルをはるかに超える作業である．きちんとした良い教科書にあたるべきであると思う．

第 1 章　関数形

1.1　関数の表現

関数の表記について，あらためてその形式と内容を確認しておこう．

変数 x, y をもつ関数 f は $f(x, y)$ とあらわされる．このときの f を関数名と言う．$f(x, y)$ と関数があらわされていたとすれば，これの意味するところは，関数名が f であり，変数を 2 つ持つ関数であって，その変数名は x, y である，ということになる．

変数を使って具体的に関数を表現したものを**関数形**ということにしよう．それは多項式であったりもするし，他の関数を使って書かれていたりもする．もちろん解析学的な表現（微分や積分など）である場合もある．関数名が同一でありかつ変数の個数も同じである場合には，関数形も同一である．つまり $f(x, y)$ と $f(u, v)$ は関数形は等しい．具体的には

$$f(x, y) = x^2 + xy + \sin(y)$$

であれば

$$f(u, v) = u^2 + uv + \sin(v)$$

ということである[*1]．このように，変数名には任意の文字（文字列）を使うことができる．$f(x, y)$ と $f(u, v)$ は関数形は同じであり，ただ変数を表現する文字が異なっているにすぎない．

1.2　変数変換による関数形の変化

変数がある規則で変換されたときの関数形の変化の振る舞いをみてみよう．

x を変数とする関数 $f(x)$ を考える．このとき，ある関数 φ があって，$x = \varphi(X)$ という関係にあるとすると，x は X を使って表現することができることになる．変数の表現を変えることを**変数変換**という．そのとき $f(x) = f(\varphi(X))$ となることははあきらかである．さらにこの最後の項は，関数 φ の働きがどのようなものであっても，結局のところ変数が X である関数である．それを $\widetilde{f}(X)$ とあらわすことにすれば

$$\widetilde{f}(X) = f(x) = f(\varphi(X)) \,. \tag{1.1}$$

$\widetilde{f}$ の関数形は，f の関数形であらわれる x を $\varphi(X)$ で置き換え（$x \to \varphi(X)$），その後に $\varphi(X)$ を「ほどいた」結果として与えられる．$\widetilde{f}$ の関数形，つまり X を使って $\widetilde{f}$ を具体的にあらわしたものは，一般には f の関数形と一致はせず，何らかの関数形の変化が見られる．この事柄を，（変数変換のもとでの）**関数変換**と呼ぶ．(1.1) (p.1) は関数変換 $\widetilde{f}$ の定義であり，恒等的に成り立つ関係である．

[*1] 実際にはこれが徹底されないことが多い．例えば，3 次元空間のポテンシャルエネルギー $U(x, y, z)$ について，極座標変換してもそれが $U(r, \theta, \phi)$ と書かれていることがよくある．一般には，極座標変換によって関数形も異なる場合がほとんどだが，同一の名前 U が用いられたりするのである．背景に「点の表現を変えただけで，点そのものもは変わっていない，なので関数値は変わらない」という事実があるからだろうと想像するのだが，往往にして，これは紛らわしさを産む．形だけから言えば，$U(x, y, z)$ に対して，$x \to r$, $y \to \theta$, $z \to \phi$ と「変数の文字を換えただけ」のものと見分けがつかず，早合点な誤解を招きかねない．同様の議論が，前野 [8, p.116] にあり，そこでは変換前と変換後で同一の関数名を用いることに対して，「暗黙の了解」，とあるが，それは熟練者の世界での話である．

多変数関数の場合にも自然に拡張できる．関数 $u(q_1, q_2, \dots, q_n)$ の変数 $\{\, q_1, q_2, \dots, q_n \,\}$ に対して $\{\, Q_1, Q_2, \dots, Q_n \,\}$ という別の変数の組があって，変数変換が

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \\ q_2 &= \varphi_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n), \\ &\cdots \\ q_n &= \varphi_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \end{aligned}$$

という関係にあるとき，関数変換は

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= u(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ &= u(\varphi_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \varphi_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \dots,\ \varphi_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)) \end{aligned}$$

となる．繰り返しになるが，u の関数形と $\widetilde{u}$ の関数形は一般には一致しない．

■例 1：$h(x) = \sin(x)$ において $x = \varphi(X) = 2\arctan(X)$ という変数変換を考えると，関数変換は

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(X) = h(x) &= \sin(x) = \sin(\varphi(X)) \\ &= \sin(2\arctan(X)) = 2\sin(\arctan(X)) \cdot \cos(\arctan(X)) \\ &= \frac{2X}{1+X^2} \end{aligned}$$

となる．関数形は全く異なっている[*2]．

■例 2：$g(x, y) = x^2 + y^2$ において

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(r, \theta) = r\cos\theta, \\ y &= \varphi_2(r, \theta) = r\sin\theta \end{aligned}$$

という変数変換を施すと

$$\widetilde{g}(r, \theta) = g(x, y) = x^2 + y^2 = (\varphi_1(r, \theta))^2 + (\varphi_2(r, \theta))^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2\ .$$

1.3　変換の図式

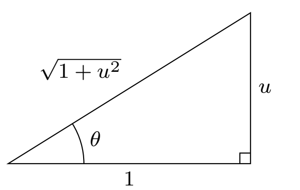
ここまで見てきたように，変数変換と関数変換は

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\ , \\ Q_i &= \varPhi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned}$$

---

*2 逆三角関数のおさらいをしておこう．図のように，直角三角形とピタゴラスの定理を用意する．これから $\tan\theta = u$ だから $\arctan(u) = \theta$ ．したがって，

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(u)) = \sin(\theta) &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\ , \\ \cos(\arctan(u)) = \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ . \end{aligned}$$



と言う変数変換の関係と

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &= L(q_1, q_2, \dots, q_n)\\ &= L(\varphi_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \varphi_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \dots,\ \varphi_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n))\end{aligned}$$

と言う関数変換の関係に一般化できた．これらの関係式は，変換操作の動きを強調することを目的として，変数変換を

$$\begin{aligned}\varPhi : \{\, q_1, q_2, \dots, q_n \,\} \quad &\longmapsto \quad \{\, Q_1, Q_2, \dots, Q_n \,\} \qquad (Q_i = \varPhi_i(q_1, q_2, \dots, q_n))\\ \varphi : \{\, Q_1, Q_2, \dots, Q_n \,\} \quad &\longmapsto \quad \{\, q_1, q_2, \dots, q_n \,\} \qquad (q_i = \varphi_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n))\end{aligned}$$

とあらわし，その変数変換のもとでの関数変換を，変数の置き換えの部分も含めて

$$\begin{aligned}L(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \longmapsto \quad &\widetilde{L}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)\\ &= L(q_1, q_2, \dots, q_n)\\ &= L(q_1 \to \varphi_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ q_2 \to \varphi_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \dots,\\ &\qquad\qquad q_n \to \varphi_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n))\\ &= L(\varphi_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \varphi_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n),\ \dots,\ \varphi_n(Q_1, Q_2, \dots, Q_n))\end{aligned}$$

とするような図式的記法を使って表現されることもある．関数変換においては，関数形は異なる可能性があるが，関数値は等しいと言う事実が最初の等号で示されている．

> 図式を用いた例をひとつ記してみよう．
>
> $$\begin{aligned}\varPhi : x \quad &\longmapsto \quad X = \tan(x/2)\ ,\\ \varphi : X \quad &\longmapsto \quad x = 2\arctan(X)\end{aligned}$$
>
> という変数変換を再び考える．この変数変換のもとで $\sin(x)$, $\cos(x)$ の関数変換は
>
> $$\begin{aligned}\sin(x) \quad &\longmapsto \quad \sin(2\arctan(X)) = 2\sin(\arctan(X))\cos(\arctan(X)) = \frac{2X}{1+X^2} = \sin(x)\\ \cos(x) \quad &\longmapsto \quad \cos(2\arctan(X)) = \cos^2(\arctan(X)) - \sin^2(\arctan(X)) = \frac{1-X^2}{1+X^2} = \cos(x)\end{aligned}$$
>
> と図式化される（三角関数の関係については p.2 の脚注*2 を参照）．

第 2 章　不変性

2.1　関数形の不変性

変数変換のもとでの関数変換では，一般には関数形は同じにはならないが，

$$\widetilde{L}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \tag{2.1}$$

となる場合には関数形は一致する．実際，関数変換においては $\widetilde{L}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = L(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ であったから

$$\widetilde{L}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \quad \Longleftrightarrow \quad L(q_1, q_2, \ldots, q_n) = L(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$$

となって，(2.1) (p.5) であれば関数形が変わらないことは明らかである．このような場合を，（変数変換しても）**関数形は不変**であるという．変換された関数は，単にもとの関数の変数を変更したものに等しい．また，この不変な関数形であらわされる量は**不変量**とも言われる．

以下，記述の簡便性のために，必要に応じて

$$\begin{aligned}
q_* &:= q_1, q_2, \ldots, q_n \ , \\
Q_* &:= Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \ , \\
\varphi_*(Q_*) &:= \varphi_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n),\ \varphi_2(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n),\ \ldots,\ \varphi_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \ , \\
\varPhi_*(q_*) &:= \varPhi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n),\ \varPhi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n),\ \ldots,\ \varPhi_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)
\end{aligned}$$

とあらわしていくことにしよう．

関数形が不変の場合は，関数変換の関係からただちに

$$\left\{\widetilde{L}(Q_*) = L(q_*) = L(\varphi_*(Q_*))\right\} = L(Q_*) \tag{2.2}$$

となり，左辺を分解して

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}(Q_*) = L(Q_*) \ , \\
&L(q_*) = L(Q_*) \ , \\
&L(\varphi_*(Q_*)) = L(Q_*)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

という 3 個の不変性の同値条件が得られる．

一方，(2.2) (p.5) の右辺において，変数変換の関係 $Q_i = \varPhi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ を用いれば

$$\left\{\widetilde{L}(Q_*) = L(q_*) = L(\varphi_*(Q_*))\right\} = L(\varPhi_*(q_*))$$

となるから，再び左辺を分解して

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}(Q_*) = L(\varPhi_*(q_*)) \ , \\
&L(q_*) = L(\varPhi_*(q_*)) \ , \\
&L(\varphi_*(Q_*)) = L(\varPhi_*(q_*))
\end{aligned} \tag{2.4}$$

という同値条件も得られる．

関数形が不変である場合には上記 6 個の等式（ (2.3) (p.5) および (2.4) (p.5) ）全てが成立する．

2.2　不変性の判定

(2.3) (p.5)　および　(2.4) (p.5)　の 6 個の等式は皆同値条件であった．したがって，関数形の不変性を確認するには，この 6 個の等式のどれかが成立していることを確かめれば良い[*1]．

ところで，関数変換 $L \mapsto \widetilde{L}$ においては，$\widetilde{L}$ の関数形は実際に変数変換を実施しないと判明しない．したがって，不変性を判定する場合には，関数形がわかっている L から始める方が取り回しが良い．さらに扱う変数も同一である方が計算の見通しが良い．なので大体の場合には

$$L(\varphi_*(Q_*)) = L(Q_*) \quad \text{または} \quad L(\varPhi_*(q_*)) = L(q_*)$$

を用いて不変性が判定される[*2]．この判定方法を，変数変換も加味して整理すると，

$$L(Q_*) \to L(\varPhi_*(q_*)) \to L(q_*) \quad \{L(Q_*) = L(\varPhi_*(q_*)) = L(q_*)\ \text{を示す}\ \}$$

という流れと

$$L(q_*) \to L(\varphi_*(Q_*)) \to L(Q_*) \quad \{L(q_*) = L(\varphi_*(Q_*)) = L(Q_*)\ \text{を示す}\ \}$$

という 2 つの流れに大別できる．

また，変数変換 $q \mapsto Q$ においては，Q を省いて $q \mapsto q + f(q)$ という形で与えられることが多い（例えば $q \mapsto q + \delta q$）．このようなときには，逆変数変換 $q = \varphi(Q)$ をあえて考えずにすむ $L(\varPhi(q)) = L(q)$ を用いる方が簡単である．事実，

$$L(Q) = L(q + f(q)) = L(\varPhi(q))$$

であるから，不変であるならば

$$L(Q) = L(q) \quad \Longleftrightarrow \quad L(\varPhi(q)) = L(q)$$

が成り立つからである．

■ **ローレンツ変換の不変量**

ローレンツ変換は，2 つの座標系 $S(t, x)$ と $S'(t', x')$ において

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) =: \varPhi_{t'}(t, x)\ , \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\left(x - Vt\right) =: \varPhi_{x'}(t, x)$$

という変数変換であらわされる（c と V は定数であり，$V \leq c$ である）．この逆変換は

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) =: \varphi_t(t', x')\ , \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\left(x' + Vt'\right) =: \varphi_x(t', x')\ .$$

その上で

$$\begin{aligned} \varDelta t' &:= t'_2 - t'_1\ , \quad \varDelta x' := x'_2 - x'_1\ , \\ \varDelta t &:= t_2 - t_1\ , \quad \varDelta x := x_2 - x_1 \end{aligned}$$

[*1] どれかひとつでも成り立たないことがわかれば，ただちに不変ではないことが判明する．

[*2] 関数形が不変である場合には $\widetilde{L}(Q_*) = L(\varphi_*(Q_*)) = L(Q_*))$ であり，かつ，$L(\varPhi_*(q_*)) = L(q_*)$ なのである．これがプロローグでふれた山本・中村の解析力学の教科書 [6] の p.123 の脚注の「すなわち」の意味するところなのであった．

とあらわし，$\gamma := 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ とすれば

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(t_2 - \frac{V}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{V}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) = \Phi_{t'}(\Delta t, \Delta x)\ ,$$
$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma\left(x_2 - Vt_2\right) - \gamma\left(x_1 - Vt_1\right) = \gamma\left(\Delta x - V\Delta t\right) = \Phi_{x'}(\Delta t, \Delta x)$$

となる．同様にして

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x\right) = \varphi_t(\Delta t', \Delta x')\ ,$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma\left(\Delta x' + V\Delta t'\right) = \varphi_x(\Delta t', \Delta x')$$

という結果も得られる．

この結果は，3.1 節（p.15）で見るように，$\Delta t, \Delta x$ が共変量であることを示している．Δt を時間間隔，Δx を空間間隔と捉える物理においては，これらが共変，つまり座標変換（変数変換）によって変化するということは，驚くべき事柄である．

関数 $L(\Delta t, \Delta x) = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ のローレンツ変換のもとでの関数変換は

$$L(\Delta t, \Delta x) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(\Delta t', \Delta x') = L(\Delta t, \Delta x) = L(\varphi_t(\Delta t', \Delta x'),\ \varphi_x(\Delta t', \Delta x'))$$

であり，また

$$\begin{aligned}
L(\varphi_t(\Delta t', \Delta x'),\ \varphi_x(\Delta t', \Delta x')) &= c^2\left(\varphi_t(\Delta t', \Delta x')\right)^2 - \left(\varphi_x(\Delta t',\ \Delta x')\right)^2 \\
&= c^2\gamma^2\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right)^2 - \gamma^2\left(\Delta x' + V\Delta t'\right)^2 \\
&= \gamma^2(c^2 - V^2)(\Delta t')^2 - \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(\Delta x')^2 \\
&= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\
&= L(\Delta t', \Delta x')
\end{aligned}$$

となるので，不変性の条件が満たされていることがわかる（2.1 節（p.5）で示した $L(\varphi_*(Q_*)) = L(Q_*)$ のケース）．さらに似たような簡単な計算により

$$L(\Phi_{t'}(\Delta t, \Delta x),\ \Phi_{x'}(\Delta t,\ \Delta x)) = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = L(\Delta t, \Delta x)$$

も示すことができる（$L(\Phi_*(q_*) = L(q_*))$ のケース）．

ローレンツ変換のもとでは $L(\Delta t, \Delta x) = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ は不変量なのである．

■ 回転変換と座標成分の和

2 次元直交座標系 $s(x, y)$ を角度 θ 回転する変換 R を考え，変換された座標系を $S(X, Y)$ としよう．この変数変換の関係は，よく知られているように

$$R : s(x, y) \quad \longmapsto \quad S(X, Y)\ , \quad \begin{cases} X = x\cos\theta + y\sin\theta =: R_X(x, y) \\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta =: R_Y(x, y) \end{cases}$$

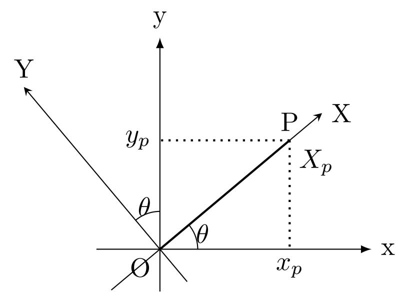
である．逆変換を r とすれば

$$r : S(X, Y) \quad \longmapsto \quad s(x, y)\ , \quad \begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta =: r_x(X, Y) \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta =: r_y(X, Y) \end{cases} \quad .$$

ここで $L(x,y)=x+y$ という座標成分の和をあらわす関数がこの回転変換のもとで不変かどうか，言い換えれば $x+y$ が不変量か否か，を判定しよう．実際に計算をしてみれば

$$L(r_x(X,Y),r_y(X,Y))=X(\cos\theta+\sin\theta)+Y(\cos\theta-\sin\theta)\neq X+Y=L(X,Y)$$

となるから，不変量ではないことがわかる（もちろん $L(R_X(x,y),R_Y(x,y))$ からはじめて，$L(x,y)$ と等しくならないとしても良い）．この事実は，幾何学的考察からも明らかである．図のように点 P が X 軸上にある場合を考えると，$Y_p=0$ であるから，$X_p+Y_p=X_p$ であり，これは三角形の斜辺であるので，どう見ても x_p+y_p よりは長い．ゆえに不変量にはなり得ないのである．



2.3 電磁場のゲージ変換

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，スカラーポテンシャル $\phi=\phi(\boldsymbol{r},t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を用いることによって，

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,,\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

とあらわすことができる[*3] [*4]．これを ϕ と $\boldsymbol{A}$ を変数とする関数と見たてよう．すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A})&=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,,\\ \boldsymbol{B}(\phi,\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\,.\end{aligned}$$

ここで，座標と時間のみを変数に持つスカラー関数 $\lambda=\lambda(\boldsymbol{r},t)$ 使って，次の変換 $\mathcal{G}$ を考える：

$$\mathcal{G}:\{\,\phi,\boldsymbol{A}\,\}\quad\longmapsto\quad\{\,\phi^g,\boldsymbol{A}^g\,\}\,,$$
$$\begin{cases}\phi^g=\phi-\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}=:G_\phi(\phi,\boldsymbol{A},\lambda)\\ \boldsymbol{A}^g=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\lambda=:G_A(\phi,\boldsymbol{A},\lambda)\end{cases}\,,\quad\begin{cases}\phi=\phi^g+\dfrac{\partial\lambda}{\partial t}=:g_\phi(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda)\\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^g-\boldsymbol{\nabla}\lambda=:g_A(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda)\end{cases}\,.$$

この変換による関数変換は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A})\quad&\longmapsto\quad\widetilde{\boldsymbol{E}}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)=\boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}(g_\phi(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda),\ g_A(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda))\,,\\ \boldsymbol{B}(\phi,\boldsymbol{A})\quad&\longmapsto\quad\widetilde{\boldsymbol{B}}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)=\boldsymbol{B}(\phi,\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}(g_\phi(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda),\ g_A(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda))\end{aligned}$$

[*3] 座標変数の表現を位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{x}}x+\hat{\boldsymbol{y}}y+\hat{\boldsymbol{z}}z$ で代用した（$\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}$ は三次元直交座標の各軸の単位ベクトル）．ベクトル解析記号 $\boldsymbol{\nabla}$ の扱いについては付録 A.3 (p.56)　節参照．
[*4] $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ がこのように書き改められることについては，5.1.2 節（p.31）の「ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル」の項を参照．

とあらわされる．右辺を計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(g_\phi(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda),\ g_A(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda)) &= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi^g+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{A}^g-\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)\\
&= \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi^g-\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}^g}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)\right)\\
&= \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi^g-\frac{\partial\boldsymbol{A}^g}{\partial t}\right)-\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)\right)\\
&= -\boldsymbol{\nabla}\phi^g-\frac{\partial\boldsymbol{A}^g}{\partial t}\qquad (\because\ \text{偏微分の順序交換可能性から上の第 2 項は 0})\\
&= \boldsymbol{E}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(g_\phi(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda),\ g_A(\phi^g,\boldsymbol{A}^g,\lambda)) &= \boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{A}^g-\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}^g-\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\lambda\\
&= \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}^g\qquad (\because\ \text{ベクトル解析の定理から任意の } f \text{ について } \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}f=0)\\
&= \boldsymbol{B}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)
\end{aligned}
$$

となって

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{E}}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g) &= \boldsymbol{E}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)\,,\\
\widetilde{\boldsymbol{B}}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g) &= \boldsymbol{B}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)
\end{aligned}
$$

であることになる，すなわち変換 $\mathcal{G}$ のもとでは常に $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は不変量なのである．

> 当然のことであるが，不変性の判定条件として $\boldsymbol{E}(G_\phi(\phi,\boldsymbol{A},\lambda),\ G_A(\phi,\boldsymbol{A},\lambda))=\boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A})$ を用いても良い．実際，
>
> $$
> \begin{aligned}
> \boldsymbol{E}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g) &= \boldsymbol{E}(G_\phi(\phi,\boldsymbol{A},\lambda),\ G_A(\phi,\boldsymbol{A},\lambda))\\
> &= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi-\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)\\
> &= \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi+\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)\right)\\
> &= \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)+\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\lambda\right)\right)\\
> &= -\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\
> &= \boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A})
> \end{aligned}
> $$
>
> となって不変であることが確認できる．$\boldsymbol{B}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)$ についても同様．

関数変換の図式に戻ってこの結果を見直すと

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A}) \quad &\longmapsto \quad \widetilde{\boldsymbol{E}}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)=\boldsymbol{E}(\phi,\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)\iff -\boldsymbol{\nabla}\phi^g-\frac{\partial\boldsymbol{A}^g}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,,\\
\boldsymbol{B}(\phi,\boldsymbol{A}) \quad &\longmapsto \quad \widetilde{\boldsymbol{B}}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)=\boldsymbol{B}(\phi,\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}(\phi^g,\boldsymbol{A}^g)\iff \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}^g=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\,.
\end{aligned}
$$

つまり，電場と磁束密度を見ているだけでは，変換 $\mathcal{G}$ による変化・影響がまったく判別できない．逆に言えば，電場と磁束密度には常にこの $\mathcal{G}$ 分の不定性が存在するのである．

このスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルに対する変換 $\mathcal{G}$ は**電磁場のゲージ変換**と呼ばれる．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は電磁場のゲージ変換を施しても変わらない（不変）．

2.4　ラグランジアンにおけるゲージ変換

前節で見たように，電磁場のポテンシャル関数にゲージ変換を施しても，電場と磁束密度は不変であった．これと同様な構造が，ラグランジアンにもある．

ラグランジアンに，座標と時間の関数の時間についての完全導関数を加えることを考え，その際のオイラー・ラグランジュ方程式の振る舞いをみると，そこには不変性が横たわっている．つまり，同一のオイラー・ラグランジュ方程式を与えるラグランジアンは複数存在するのである．ラグランジアンにはこのような任意性（不定生）がある．この導関数を付け加えることを**ラグランジアンのゲージ変換**と呼ぶ．

以下，その実際を見ていき，最後に電磁場のゲージ変換との関係を導出していこう．

ラグランジアン $L(q_*, \dot{q}_*, t)$ の q_i に対するオイラー・ラグランジュ方程式を $(EL[L])_i$ とあらわすことにする．すなわち

$$(EL[L])_i := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\ .$$

こうすることによって，オイラー・ラグランジュ方程式はラグランジアン L の関数としてとらえられる．

ラグランジアン L に，座標と時間のみの関数 Λ の，時間についての完全導関数 $d\Lambda/dt$ を付け加えるという変換を考え，この変換の図式を

$$L(q_*, \dot{q}_*, t) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(q_*, \dot{q}_*, t) = L(q_*, \dot{q}_*, t) + \frac{d\Lambda(q_*, t)}{dt} =: \varPhi(L, \Lambda)$$

とあらわそう．この変換のもとでのオイラー・ラグランジュ方程式の変換の図式は

$$(EL[L])_i \quad \longmapsto \quad (\widetilde{EL}[\widetilde{L}])_i = (EL[L])_i = (EL[\varphi(\widetilde{L}, \Lambda)])_i$$

となるのであった（φ は $\varPhi$ の逆関数である）．ここで不変性の判定条件として，すでに $\varPhi$ が与えられているので，$(EL[\widetilde{L}])_i = (EL[\varPhi(L, \Lambda)])_i = (EL[L])_i$ を用いよう．順次計算を実行していくと，まず，

$$\begin{aligned}
(EL[\widetilde{L}])_i = (EL[\varPhi(L, \Lambda)])_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(L + \frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(L + \frac{d\Lambda}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right\} \\
&= (EL[L])_i + \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．次にこの $\{\cdots\}$ の中身の計算に移る．$d\Lambda/dt$ は Λ の全微分を取ることによって

$$\begin{aligned}
d\Lambda(q_*, t) &= \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\, dq_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\, dq_2 + \cdots + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\, dq_n + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\, dt \\
\therefore \quad \frac{d\Lambda(q_*, t)}{dt} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

と求まる．ここで各項の性質を見ておくと，そもそも Λ は $\dot{q}_*$ を含まないので，$\partial\Lambda/\partial q_k$ には $\dot{q}_*$ は含まれない．ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} = 0 \qquad (\text{for all } j, k).$$

同様に $\partial\Lambda/\partial t$ にも $\dot{q}_*$ は含まれないから

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = 0 \qquad (\text{for all } j).$$

また $\dot{q}_j, \dot{q}_k$ は一般化速度であるから各々が独立で

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \delta_{j,k} \qquad (\text{for all } j,k)^{*5}$$

さらに $\dot{q}_j, q_k$ も一般化速度と一般化座標であるからこれも各々が独立なので

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} = 0 \qquad (\text{for all } j,k)\ .$$

これらの性質を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_k}\right)\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k}\delta_{j,k}$$

となり，それゆえ

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\ .$$

したがって，(2.5) (p.10) の $\{\cdots\}$ の第 1 項は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right)$$

となる．もともと Λ は座標と時間のみの関数と仮定したのであるから，$\partial\Lambda/\partial q_i$ も q_* と t のみの関数であって[*6]，$\partial\Lambda/\partial q_i =: \xi(q_*, t)$ と置き換えることができる．この ξ の全微分をとると

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial q_1}\,dq_1 + \frac{\partial \xi}{\partial q_2}\,dq_2 + \cdots + \frac{\partial \xi}{\partial q_n}\,dq_n + \frac{\partial \xi}{\partial t}\,dt \\ \therefore\quad \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \xi}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \xi}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \xi}{\partial t} \end{aligned}$$

であるから，ξ を元に戻して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right)\dot{q}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right)\dot{q}_2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial q_n}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right)\dot{q}_n + \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right)$$

という結果が得られる．連続関数であれば（Λ が連続であることは前提としておく）偏微分の順序は交換できて

$$= \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\right)\dot{q}_2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\right)\dot{q}_n + \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)$$

となり，先に見た $\partial\dot{q}_j/\partial q_k = 0$ を利用して $\partial/\partial q_i$ をくくり出せば（積の微分に留意することが必要）

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)$$

が得られ，これに (2.6) (p.10) をあてはめて

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\ .$$

以上の結果から

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right) = 0$$

[*5] $j = k$ ならば $\delta_{j,k} = 1$，$j \neq k$ ならば $\delta_{j,k} = 0$ とするクロネッカーの δ である．

[*6] 例えば仮に $\Lambda = (q_1)^2 \cdot (q_2)^2 \cdot t$ であるとすると，$\partial\Lambda/\partial q_1 = 2q_1 \cdot (q_2)^2 \cdot t$ である（$\dot{q}$ の現れる余地はない）．

であることが導けた．したがって，(2.5) (p.10) は

$$(EL[\widetilde{L}])_i = (EL[L])_i + \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right) \right\} = (EL[L])_i$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

となる．つまり，オイラー・ラグランジュ方程式は，ラグランジアンが

$$L(q_*, \dot{q}_*, t) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(q_*, \dot{q}_*, t) = L(q_*, \dot{q}_*, t) + \frac{d\Lambda(q_*, t)}{dt}$$

と変換されても，不変なのである．このオイラー・ラグランジュ方程式を不変にする変換を**ラグランジアンのゲージ変換**と呼ぶ．

さらにこの $\Lambda(q_*, t)$ に対しては

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\Lambda}{dt}\right) = 0$$

が常に成り立つ[*7]．

> 作用積分の観点からすれば，まず
>
> $$\begin{aligned}\widetilde{S} &= \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{L}(q_*, \dot{q}_*, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_*, \dot{q}_*, t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Lambda(q_*, t)}{dt}\,dt \\ &= S + \Big[\Lambda(q_*(t), t)\Big]_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$
>
> である．最後の項は，$\Lambda(q_*(t_2), t_2) - \Lambda(q_*(t_1), t_1)$ であり，これは作用積分の端点のみに依存する量であることがわかる．端点での変分は 0，すなわち，$\delta q_*(t_2) = \delta q_*(t_1) = 0$ であるから，作用の変分をとる際には，なくなってしまう．つまり
>
> $$\delta\Big[\Lambda(q_*(t), t)\Big]_{t_1}^{t_2} = 0\ .$$
>
> したがって
>
> $$\delta\widetilde{S} = \delta S - \delta\Big[\Lambda(q_*(t), t)\Big]_{t_1}^{t_2} = \delta S$$
>
> であるから，$\widetilde{S}$ と S つまり $\widetilde{L}$ と L から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式は全く同一となるのである．

[*7] これは，$d\Lambda/dt$ に対するオイラー・ラグランジュ方程式でもある（オイラー・ラグランジュ方程式の形式を満たしているという意味合いである．$d\Lambda/dt$ がラグランジアンであるということを述べているわけではない）．これから，

$$(EL[\widetilde{L}])_i = (EL[L])_i + \left(EL\left[\frac{d\Lambda}{dt}\right]\right)_i$$

とあらわすこともできる．そして常に $\left(EL\left[\frac{d\Lambda}{dt}\right]\right)_i = 0$ である．

□ 電磁場のゲージ変換とラグランジアンのゲージ変換の関係

電磁場中の荷電粒子（電荷 e，質量 m）の非相対論的ラグランジアンは[*8]

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-e\left(\phi-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A})\right)$$

であたえられる．ここで，座標と時間のみの関数として

$$\Lambda=e\cdot\lambda(\boldsymbol{r},t)$$

というものを考えよう．Λ の時間に関する導関数は

$$\frac{d\Lambda}{dt}=e\frac{d\lambda}{dt}=e\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)=e\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)=e\left((\boldsymbol{\nabla}\lambda)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)$$

となる[*9]．これを用いてラグランジアンをゲージ変換すると

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)\quad\longmapsto\quad\widetilde{L}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)&=L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)+\frac{d\Lambda}{dt}\\
&=L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)+e\frac{d\lambda}{dt}\\
&=\left\{\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-e\left(\phi-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A})\right)\right\}+e\left\{(\boldsymbol{\nabla}\lambda)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right\}\\
&=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-e\left\{\left(\phi-\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)-\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\lambda)\right\}
\end{aligned}$$

となる．これは，そもそものラグランジアン L に

$$\begin{aligned}
\phi\quad&\longmapsto\quad\phi^g=\phi-\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
\boldsymbol{A}\quad&\longmapsto\quad\boldsymbol{A}^g=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\lambda
\end{aligned}$$

という変換が施されたものとみることができる．いっぽうこの変換は電磁場のゲージ変換に他ならない．つまり電磁場をゲージ変換した時のラグランジアンはこの形であり，反対に，ラグランジアンを Λ を使ってゲージ変換したものは電磁場のゲージ変換にもなっているのである．ラグランジアンのゲージ変換ではオイラー・ラグランジュ方程式は変わらないことは先に見た．つまり電磁場にゲージ変換を施しても，オイラー・ラグランジュ方程式は変わらないのである．

さらに，Λ すなわち λ の形には，それが座標と時間の関数であること以外になんの制約もない．自然には（電磁場には？）この曖昧さが常に残っている．

[*8] 相対論的ラグランジアンは $L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=-mc^2\sqrt{1-\dfrac{\dot{r}^2}{c^2}}-e\left(\phi-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A})\right)$ である．相対論的ラグランジアンでも全く同様な議論が成り立つ．

[*9] 各々が直交する座標軸の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ とすれば $\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{x}}x+\hat{\boldsymbol{y}}y+\hat{\boldsymbol{z}}z$ とあらわせる．その上で

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{dx}{dt}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{dy}{dt}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{dz}{dt}\,,\qquad\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

という略記法を使った．

第 3 章　共変性

3.1　共変量

今までと同様に，$\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ と $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ の変数変換の関係が

$$\begin{array}{rclr} \varPhi : \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} & \longmapsto & \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} & (Q_i = \varPhi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)) \\ \varphi : \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\} & \longmapsto & \{q_1, q_2, \ldots, q_n\} & (q_i = \varphi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) \end{array} \tag{3.1}$$

とあたえられているとしよう．このときある量 $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ と $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ が，あたえられた変数変換の規則を満たす，すなわち

$$\begin{array}{rcll} \varPhi : \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} & \longmapsto & \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} & (P_i = \varPhi_i(p_1, p_2, \ldots, p_n)) \\ \varphi : \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} & \longmapsto & \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} & (p_i = \varphi_i(P_1, P_2, \ldots, P_n)) \end{array}$$

という関係にあるとき，$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$，$\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ は，（q_*, Q_* の変数変換に対して）**共変である**，といい，p_*, P_* を**共変量**であるという．

2.2 節のローレンツ変換の不変量（p.6）のところで見たように，ローレンツ変換

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad x' = \gamma\left(x - Vt\right)$$

（ただし，$\gamma := 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$）のもとで

$$\begin{aligned} \varDelta t &:= t_2 - t_1 , \quad \varDelta x := x_2 - x_1 , \\ \varDelta t' &:= t'_2 - t'_1 , \quad \varDelta x' := x'_2 - x'_1 \end{aligned}$$

と言う量を考えると

$$\varDelta t' = \gamma\left(\varDelta t - \frac{V}{c^2}\varDelta x\right), \quad \varDelta x' = \gamma\left(\varDelta x - V\varDelta t\right)$$

となっていた．この関係が示すように，$\{t, x\} \mapsto \{t', x'\}$ と $\{\varDelta t, \varDelta x\} \mapsto \{\varDelta t', \varDelta x'\}$ は同じように変換される，つまり共変量である．

一方，ガリレイ変換

$$t' = t , \quad x' = x - Vt$$

においては

$$\begin{aligned} \varDelta t' &= t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1 = \varDelta t , \\ \varDelta x' &= x'_2 - x'_1 = (x_2 - Vt) - (x_1 - Vt) = x_2 - x_1 = \varDelta x \end{aligned}$$

となる．ガリレイ変換では時間間隔 $\varDelta t$ と（同時刻での）空間間隔 $\varDelta x$ は不変量なのである[*1]．

実際に p_*, P_* が共変量であるかどうかを判断するには，変数変換を施した結果がどうなるかということを計算して確かめる必要がある．しかしながら，1 変数関数であらわされる量については，ある一つの十分条件が存在する．

1 変数関数 $L(q_i)$ の関数変換の図式は

$$L(q_i) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = L(q_i) = L(\varphi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n))$$

である．このとき

$$L(\varphi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) = \varphi_i(L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n)) \tag{3.2}$$

という関係が成り立つとすれば

$$\begin{aligned}
&L(q_1) = L(\varphi_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) = \varphi_1(L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n)) \,, \\
&L(q_2) = L(\varphi_2(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) = \varphi_2(L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n)) \,, \\
&\quad \cdots \\
&L(q_n) = L(\varphi_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) = \varphi_n(L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n))
\end{aligned}$$

という結果が得られる．すなわち $\{\, L(q_1), L(q_2), \ldots, L(q_n) \,\}$ と $\{\, L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n) \,\}$ の間には

$$\varphi : \{\, L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n) \,\} \quad \longmapsto \quad \{\, L(q_1), L(q_2), \ldots, L(q_n) \,\}$$

という関係があることになる．つまり，(3.2) (p.16) の仮定が成り立てば，q_*, Q_* の変数変換に対して共変になるのである（したがって，(3.2) (p.16) は共変であるための十分条件である）．

3.2　線形変数変換での共変性

変数変換 (3.1) (p.15) が 1 次の線形結合であたえれる場合（**線形変数変換**）を考えよう[*2]．1 次の線形結合であるから変数変換は

$$\begin{aligned}
q_i &= \varphi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = \varphi_{i,1}Q_1 + \varphi_{i,2}Q_2 + \cdots + \varphi_{i,n}Q_n \,, \\
Q_i &= \Phi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \Phi_{i,1}q_1 + \Phi_{i,2}q_2 + \cdots + \Phi_{i,n}q_n
\end{aligned}$$

とあらわすことができる．このような線形変数変換では次の行列表記が簡便である：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \\ \varphi_2(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,n} \\ \varphi_{2,1} & \cdots & \varphi_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n,1} & \cdots & \varphi_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} =: \varphi \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \,,$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \Phi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,n} \\ \Phi_{2,1} & \cdots & \Phi_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n,1} & \cdots & \Phi_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \,.$$

φ と Φ は互いに逆変換であったという事実は，上式において行列 φ と行列 Φ が互いに逆行列の関係にあるという事柄に反映されている．すなわち，$\varphi\Phi = \Phi\varphi = 1$．

*1 この結果から，時間変数と座標変数であらわされる微分量 d^2x/dt^2 は不変であることも導き出される．したがって，質量と力がガリレイ変換で不変であれば，ニュートンの運動方程式はガリレイ変換で不変となる．質量が時間と座標の関数でないことは仮定して良いだろう（とりあえず今の所）．力はベクトル量であり，座標成分に分解してあらわすことができる．空間間隔がガリレイ変換で不変という結果から，力の座標成分これもまた不変である．よってガリレイ変換ではニュートンの運動方程式は不変になる．

*2 座標回転変換やガリレイ変換，ローレンツ変換など，物理方面の慣性系にまつわる変換は線形変数変換であることが多い．しかしながら，極座標変換は線形変換ではない（なので色々と計算がややこしい）．

共変性を確認してみよう．関数変換が共変であるための十分条件は

$$L(\varphi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) = \varphi_i(L(Q_1), L(Q_2), \ldots, L(Q_n))$$

であった．一方この線形変数変換によって

$$L(q_i) = L(\varphi_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)) = L(\varphi_{i,1}Q_1 + \varphi_{i,2}Q_2 + \cdots + \varphi_{i,n}Q_n)$$

である．したがって

$$L(\varphi_{i,1}Q_1 + \varphi_{i,2}Q_2 + \cdots + \varphi_{i,n}Q_n) = \varphi_{i,1}L(Q_1) + \varphi_{i,2}L(Q_2) + \cdots + \varphi_{i,n}L(Q_n)$$

であるならば共変性が成り立つことになる．行列で書き改めると

$$\begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

であり，φ と $\varPhi$ は互いに逆行列であるから（左から $\varPhi$ をかけて）

$$\varPhi \begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} \quad .$$

線形変数変換の関係と対応づけると

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \varPhi \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} = \varPhi \begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix}$$

となって，共変性があらわに見てとれる．

さらにこの事柄を $L(q_i) + M(q_i) = K(q_i)$ という関数の等式に適用してみよう．変数変換を施せば

$$\begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M(q_1) \\ M(q_2) \\ \vdots \\ M(q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(q_1) \\ K(q_2) \\ \vdots \\ K(q_n) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} L(\varphi_1(Q_*)) \\ L(\varphi_2(Q_*)) \\ \vdots \\ L(\varphi_n(Q_*)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M(\varphi_1(Q_*)) \\ M(\varphi_2(Q_*)) \\ \vdots \\ M(\varphi_n(Q_*)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(\varphi_1(Q_*)) \\ K(\varphi_2(Q_*)) \\ \vdots \\ K(\varphi_n(Q_*)) \end{pmatrix}$$

となる[*3]．そして L, M, K がすべて共変であるならば (3.3) (p.17) を用いて

$$\iff \varphi \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} M(Q_1) \\ M(Q_2) \\ \vdots \\ M(Q_n) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} K(Q_1) \\ K(Q_2) \\ \vdots \\ K(Q_n) \end{pmatrix}$$

$$\iff \Phi\varphi \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} + \Phi\varphi \begin{pmatrix} M(Q_1) \\ M(Q_2) \\ \vdots \\ M(Q_n) \end{pmatrix} = \Phi\varphi \begin{pmatrix} K(Q_1) \\ K(Q_2) \\ \vdots \\ K(Q_n) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M(Q_1) \\ M(Q_2) \\ \vdots \\ M(Q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(Q_1) \\ K(Q_2) \\ \vdots \\ K(Q_n) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．すなわち $L(Q_i) + M(Q_i) = K(Q_i)$．この結果は，$L + M = K$ という関係が保存されていることを示している[*4]．

3.3　回転変換とニュートンの運動方程式

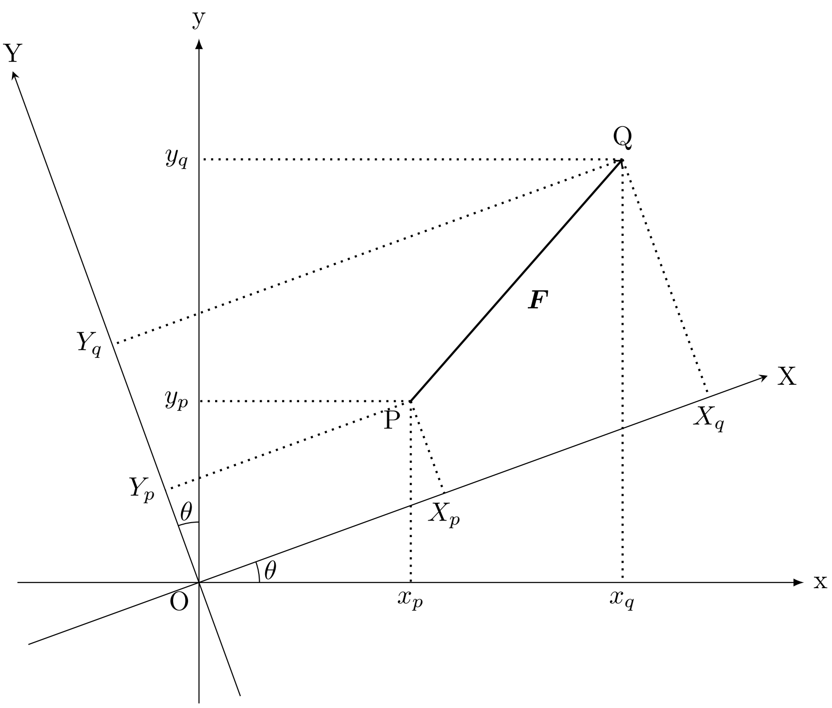


Fig.3.1: 2 次元の角度 θ の回転変換

点 P に質量 m の質点があり，それに $\boldsymbol{F}$ という力が働いているという状況で，2 次元での原点の周りの θ の

[*3] 前述したように，Q_* は $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ の簡略形である．
[*4] もちろん，L, M, K がすべて共変でなければこれは成立しない．その各々の共変性は別途調べておく必要がある．

座標の回転変換とニュートンの運動方程式の変換関係をみてみよう．回転変換での変数変換は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad &\longmapsto \quad \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos\theta + y\sin\theta\\ -x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}\varPhi_X(x,y)\\ \varPhi_Y(x,y)\end{pmatrix} ,\\ \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \quad &\longmapsto \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\cos\theta - Y\sin\theta\\ X\sin\theta + Y\cos\theta\end{pmatrix} =: \begin{pmatrix}\varphi_x(X,Y)\\ \varphi_y(X,Y)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

とあらわされることは図からも明らかである．

ニュートンの運動方程式は，x 軸方向，y 軸方向それぞれ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \ , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y$$

である．ここで F_x, F_y は力をあらわすベクトル $\boldsymbol{F}$ の成分であり，

$$F_x = x_q - x_p \ , \quad F_y = y_q - y_p \ .$$

関数変換調べるために

$$N(x) := m\frac{d^2x}{dt^2} \ , \quad F(x_q, x_p) := x_q - x_p$$

としよう．関数変換を施せば

$$\begin{aligned} N(x) \quad &\longmapsto \quad \widetilde{N}(X,Y) = N(x) = N(\varphi_x(X,Y))\\ F(x_q,x_p) \quad &\longmapsto \quad \widetilde{F}(X_q,X_p,Y_q,Y_p) = F(x_q,x_p) = F(\varphi_x(X_q,Y_q),\ \varphi_x(X_p,Y_p)) \ .\end{aligned}$$

φ の具体的な形を用いると

$$\begin{aligned} N(\varphi_x(X,Y)) &= N(X\cos\theta - Y\sin\theta)\\ &= m\frac{d^2}{dt^2}\Big(X\cos\theta - Y\sin\theta\Big) = m\frac{d^2X}{dt^2}\cos\theta - m\frac{d^2Y}{dt^2}\sin\theta\\ &= \varphi_x(N(X),\ N(Y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\varphi_x(X_q,Y_q),\ \varphi_x(X_p,Y_p)) &= F\Big((X_q\cos\theta - Y_q\sin\theta),\ (X_p\cos\theta - Y_p\sin\theta)\Big)\\ &= (X_q - X_p)\cos\theta - (Y_q - Y_p)\sin\theta\\ &= \varphi_x(F(X_q,X_p),\ F(Y_q,Y_p))\end{aligned}$$

となり，共変性の条件が満たされる．まったく同様にして，

$$\begin{aligned} N(y) \quad \longmapsto \quad \widetilde{N}(X,Y) &= N(y) = N(\varphi_y(X,Y)) = N(X\sin\theta + Y\cos\theta)\\ &= m\frac{d^2}{dt^2}\Big(X\sin\theta + Y\cos\theta\Big) = m\frac{d^2X}{dt^2}\sin\theta + m\frac{d^2Y}{dt^2}\cos\theta\\ &= \varphi_y(N(X),\ N(Y))\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} F(y_q,y_p) \quad \longmapsto \quad \widetilde{F}(X_q,X_p,Y_q,Y_p) &= F(y_q,y_p) = F(\varphi_y(X_q,Y_q),\ \varphi_y(X_p,Y_p))\\ &= F\Big((X_q\sin\theta + Y_q\cos\theta),\ (X_p\sin\theta + Y_p\cos\theta)\Big)\\ &= (X_q - X_p)\sin\theta + (Y_q - Y_p)\cos\theta\\ &= \varphi_y(F(X_q,X_p),\ F(Y_q,Y_p))\end{aligned}$$

となる．まとめると

$$\begin{aligned} N(x) \quad &\longmapsto \quad N(\varphi_x(X,Y)) = \varphi_x(N(X),\ N(Y)) \ ,\\ F(x_q,x_p) \quad &\longmapsto \quad F(\varphi_x(X_q,Y_q),\ \varphi_x(X_p,Y_p)) = \varphi_x(F(X_q,X_p),\ F(Y_q,Y_p)) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(y) \quad &\longmapsto \quad N(\varphi_y(X,Y)) = \varphi_y(N(X),\ N(Y)) \ ,\\ F(y_q,y_p) \quad &\longmapsto \quad F(\varphi_y(X_q,Y_q),\ \varphi_y(X_p,Y_p)) = \varphi_y(F(X_q,X_p),\ F(Y_q,Y_p))\end{aligned}$$

という関係であり，ニュートンの運動方程式は回転変換に対して共変であることがみて取れたのである．

同様の事柄を，回転変換が線形変数変換であることを利用して示してみよう．行列

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathsf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用意すると，変数変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathsf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

とあらわせる．

力 $\boldsymbol{F}$ の成分の変換を見てみよう．(x, y) 系での $\boldsymbol{F}$ の成分を F_x, F_y，(X, Y) 系でのそれを F_X, F_Y とすれば

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_q - X_p \\ Y_q - Y_p \end{pmatrix}$$

である．ここで

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_p \\ y_q \end{pmatrix}$$

でもあるから，これに R を作用させて変数変換の結果を用いると

$$\mathsf{R}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \mathsf{R}\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} - \mathsf{R}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_q \\ Y_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_q - X_p \\ Y_q - Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix}$$

となる．したがって力 $\boldsymbol{F}$ の成分は

$$\begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \mathsf{R}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \iff \mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

と変換されることがわかり，$\boldsymbol{F}$ の成分が共変であることが導出できる

関数 $N(x) = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $N(y) = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$ についてもほぼ同様で

$$\begin{pmatrix} N(x) \\ N(y) \end{pmatrix} = m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，R を作用させると

$$\mathsf{R}\begin{pmatrix} N(x) \\ N(y) \end{pmatrix} = m\frac{d^2}{dt^2}\cdot\mathsf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m\frac{d^2}{dt^2}\cdot\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(X) \\ N(Y) \end{pmatrix}$$

となり，その結果

$$\begin{pmatrix} N(X) \\ N(Y) \end{pmatrix} = \mathsf{R}\begin{pmatrix} N(x) \\ N(y) \end{pmatrix} \iff \mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} N(X) \\ N(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(x) \\ N(y) \end{pmatrix}$$

となって，$N(x), N(y)$ もやはり共変となっている．

ニュートンの運動方程式は，ここまでの表現形式を用いれば $\begin{pmatrix} N(x) \\ N(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ という方程式になるから，共変性の結果より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N(x) \\ N(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} &\iff \mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} N(X) \\ N(Y) \end{pmatrix} = \mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} \\
&\iff \mathsf{R}\mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} N(X) \\ N(Y) \end{pmatrix} = \mathsf{R}\mathsf{R}^{-1}\begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} N(X) \\ N(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_X \\ F_Y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となって，X, Y 系においてもニュートンの運動方程式は成立している．これは，3.2 節（p.16）で見たように，共変性の結果不変性が保存しているということでもある．つまりどちらの座標系でもニュートンの運動方程式は同一な形式をしており，不変なのである．

> 最後の結果でもって「ニュートンの運動方程式は不変」ということが多い．細かく言えば，変数変換に対して運動方程式の各項（$N(x)$ や F_x など）は共変なのであり，それらが共変であるがゆえに，運動方程式として不変であるということなのである．
>
> 少し掘り下げていえば，この例では，運動方程式の変換に対して，回転角 θ が何もコミットしない，ということである．θ がどんな値でも運動方程式には影響がない．同様なことは平行移動の関係でも言えていて，どれだけ平行移動していようとも，運動方程式には全く関与しないのである．
>
> 反対に，もし回転角 θ や平行移動量が運動方程式にコミットするのだとすると，我々は常にその量を意識して運動方程式を考えていなければならないことになる．「今は $\theta = 30°$ であるから $\cdots$」とか，「$l = 10\,\mathrm{km}$ 平行移動しているから $\cdots$」などなど．そしてそうなると，どこかに基準を設ける必要が出てくることになって，絶対静止系の存在まで要請することになりかねない．
>
> しかしながら自然はそうなっていないようである．物理法則は座標変換という変換に対しては形を変えない（これを物理法則の共変性という）．共変するから法則自身は不変とも言える．この共変性の要請は，個別の物理法則が満たすべき普遍的な原理であり，物理法則に対する上位規定であり，物理屋の哲学なのである．
>
> とはいえ，これは鶏と卵的な様相を醸し出す．座標変換（すなわち変数変換）に対して共変でないから法則が間違っているのか，それとも，法則は正しくて，座標変換（変数変換）が正しくないから共変でないのか．「変換」の海はかなり深いようである．

3.4　もうひとつのローレンツ変換の共変量

ローレンツ変換

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \quad x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

のもとでは（ここでは $\beta := V/c$ を用いる）$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ であった（ローレンツ変換の不変量（p.6）の項参照）．この式は Δ の極限を取ることによって

$$c^2(dt')^2 - (dx')^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2$$

という微分量の関係であらわすことができる．ここから少し技巧的な変形を行う[*5]．まず上の式から焦点を $dt,\ dt'$ にうつして

$$(dt')^2 - \frac{1}{c^2}(dx')^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(dx)^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (dt')^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2\right) = (dt)^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right).$$

両辺の正の平方根を採用して

$$dt'\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

[*5] この計算においては $(dx)^2/(dt)^2 = (dx/dt)^2$ のように，微分量に対する演算が通常の代数のように実行されている．これは数学的に正当化されている処方である．立ち止まってじっくりと考えたい場合には，高瀬 [2], [3], [4] が参考になる．とりわけ [2] の p.210 には

> 今日では，理論的枠組みは近代解析に求め，実際の計算では古典解析を踏襲している．このちぐはぐさが露呈して議論の循環が起こるのである

とある（ここで言っている「古典解析」とは，概ね微分量の代数的取り扱いのことであると諒解されたい）．これに触発されて，わたくしはそれらの高瀬本で学習し，わたくしなりの理解をまとめるつもりで [1] なる（拙い）ものを書いた．

これらは，相対論の用語では固有時と呼ばれる．つまり S 系で dx/dt （速度である）で運動する物体にバインドした固有時は $d\tau := dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$ であり，S' 系で dx'/dt' で運動する物体にバインドした固有時は $d\tau' := dt'\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2}$ である．$d\tau' = d\tau$ であり形式も一致している．固有時はローレンツ変換での不変量なのである．

ここで，次の量 M と p を考える（$dx/dt =: v$ とした）:

$$
\begin{aligned}
M &:= m\frac{dt}{d\tau} = m\frac{dt}{dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ , \\
p &:= m\frac{dx}{d\tau} = m\frac{dx}{dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .
\end{aligned}
$$

さらに，ローレンツ変換の式を微分することによって，

$$
dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}dx\right), \quad dx' = \gamma\left(dx - \beta c dt\right)
$$

が得られる．これらの結果と $d\tau' = d\tau$ という事実を使って

$$
\begin{aligned}
M' &:= m\frac{dt'}{d\tau'} = m\frac{dt'}{d\tau} = \gamma\left(m\frac{dt}{d\tau} - \frac{\beta}{c}m\frac{dx}{d\tau}\right) = \gamma\left(M - \frac{\beta}{c}p\right)\ , \\
p' &:= m\frac{dx'}{d\tau'} = m\frac{dx'}{d\tau} = \gamma\left(m\frac{dx}{d\tau} - \beta c m\frac{dt}{d\tau}\right) = \gamma\left(p - \beta c M\right)
\end{aligned}
$$

という結果，すなわち (M,p) の変換は (t,x) の変換と同じである，ということがわかる．つまり共変なのである．

行列を使ってあらわせば，まず元々の (t,x) に対するローレンツ変換は

$$
\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & -\beta/c \\ -\beta c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}
$$

であり，今求めた (M,p) の変換は

$$
\begin{pmatrix} M' \\ p' \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & -\beta/c \\ -\beta c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M \\ p \end{pmatrix}
$$

となっていて，共変性があらわに見て取れる．

さらに，$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ の不変性を示したときと同じ論法を用いれば，$c^2(\Delta M)^2 - (\Delta p)^2$ が不変量であることも導出できる．

第 4 章　微分形を含む関数

微分を含む関数の関数形の変化について考察する．物理方面では法則が微分方程式を用いて書かれることが多い．そのことが，この題材に注目する理由である．

4.1　導関数（偏導関数）の関数変換

変数変換 $x=\varphi(X)$ のもとでの $F(x)$ の関数変換は $F(x)=F(\varphi(X))=\widetilde{F}(X)$ であるから，これを x で微分し，chain rule （連鎖律）を用いると

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{dF(\varphi(X))}{dx}=\frac{d\widetilde{F}(X)}{dx}=\frac{d\widetilde{F}(X)}{dX}\frac{dX}{dx}$$

となることがわかる． 1 変数の場合の微分形式の変換はこのようになる．図式化すれば

$$\frac{dF(x)}{dx}\quad\longmapsto\quad\frac{d\widetilde{F}(X)}{dX}\frac{dX}{dx}\ .$$

多変数関数の場合を同様に考えよう．変数変換 $\{\,x,y,z\,\}\mapsto\{\,X,Y,Z\,\}$ のもとで $F(x,y,z)=\widetilde{F}(X,Y,Z)$ と関数変換されていれば，x による偏導関数は同様に chain rule を用いて

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}$$

となる．したがって，x による偏導関数の関数変換は

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\quad\longmapsto\quad\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{F}(X,Y,Z)}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial x}\ .$$

上記結果を n 変数関数の場合に拡張する．変数変換を $\{\,q_1,q_2,\dots,q_n\,\}\mapsto\{\,Q_1,Q_2,\dots,Q_n\,\}$ とし，関数変換を $U(q_1,q_2,\dots,q_n)=\widetilde{U}(Q_1,Q_2,\dots,Q_n)$ とあらわすと，q_i による偏導関数の関数変換は

$$\frac{\partial U(q_1,q_2,\dots,q_n)}{\partial q_i}\quad\longmapsto\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{U}(Q_1,Q_2,\dots,Q_n)}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\ .$$

上の場合に加えて，関数が q_* の他に m 個の別の r_i をも変数にもつ場合，つまり，

$$V(q_1,q_2,\dots,q_n,\ r_1,r_2,\dots,r_m)$$

というような関数を考えてみる[*1]．このとき $q\to Q$ の変数変換によって $\{\,r_1,r_2,\dots,r_n\,\}\mapsto\{\,R_1,R_2,\dots,R_n\,\}$ となるものとすれば，関数変換は

$$V(q_1,q_2,\dots,q_n,\ r_1,r_2,\dots,r_m)\quad\longmapsto\quad\widetilde{V}(Q_1,Q_2,\dots,Q_n,\ R_1,R_2,\dots,R_m)$$

[*1] ラグランジアン $L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)$ のような関数を想定していて，関数変換は $L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\widetilde{L}(Q_1,Q_2,\dot{Q}_1,\dot{Q}_2)$ となる．

であり，偏導関数の関数変換は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V(q_1, q_2, \ldots, q_n,\ r_1, r_2, \ldots, r_m)}{\partial q_i} \\
&\quad\longmapsto \\
&\frac{\partial \widetilde{V}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n,\ R_1, R_2, \ldots, R_m)}{\partial q_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{V}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n,\ R_1, R_2, \ldots, R_m)}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{V}(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n,\ R_1, R_2, \ldots, R_m)}{\partial R_k} \frac{\partial R_k}{\partial q_i}
\end{aligned}
$$

となる．

> 再び次の変数変換で考えよう：
>
> $$
> \begin{aligned}
> \Phi : x &\quad\longmapsto\quad X = \tan(x/2)\ , \\
> \varphi : X &\quad\longmapsto\quad x = 2\arctan(X)\ .
> \end{aligned}
> $$
>
> この変数変換のもとで $\cos(x)$ は
>
> $$\cos(x) \quad\longmapsto\quad \cos(2\arctan(X)) = \cos^2(\arctan(X)) - \sin^2(\arctan(X)) = \frac{1-X^2}{1+X^2}$$
>
> と変換されることを先に見た．一方 $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ であるから，$\dfrac{d}{dx}\sin(x)$ の関数変換の結果も $\cos(x)$ の結果と同様になるはずである．関数変換は
>
> $$\frac{d}{dx}\sin(x) \quad\longmapsto\quad \frac{d}{dX}(\sin(2\arctan(X))) \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{d}{dX}\left(\frac{2X}{1+X^2}\right) \cdot \frac{dX}{dx}$$
>
> とあらわされる．ここで
>
> $$
> \begin{aligned}
> \frac{dX}{dx} &= \frac{d}{dx}\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+X^2)\ , \\
> \frac{d}{dX}\left(\frac{2X}{1+X^2}\right) &= \frac{2(1-X^2)}{(1+X^2)^2}
> \end{aligned}
> $$
>
> であるから
>
> $$\frac{d}{dX}\left(\frac{2X}{1+X^2}\right) \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{2(1-X^2)}{(1+X^2)^2} \cdot \frac{1}{2}(1+X^2) = \frac{1-X^2}{1+X^2}$$
>
> すなわち
>
> $$\frac{d}{dx}\sin(x) \quad\longmapsto\quad \frac{1-X^2}{1+X^2}$$
>
> となって $\cos(x)$ の関数変換の結果と等しくなっていることが確認できる．

4.2　微分形が複合しているときの関数変換

$U := U(q_1, q_2)$ が $\widetilde{U} := \widetilde{U}(Q_1, Q_2)$ に関数変換されるとき $\dfrac{\partial U}{\partial q_1} + \dfrac{\partial U}{\partial q_2}$ がどのように関数変換されるかを考察してみよう．この関数の変換は，上の 4.1 節（p.23）で見たように

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial q_1} + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial q_2} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}$$

となる．この微分形の部分を演算子化すれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\right)U=\left(\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\widetilde{U}=\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial Q_2}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial Q_2}\right)\widetilde{U}$$

と書き換えることができる．このように，微分形の関数変換は，微分される関数と演算子の部分とに分離することが可能である．そして演算子は，chain rule をもって変換されるから，元の変数と変換後の変数が融合したものになる．

演算子部分を Ω であらわし，演算子に現れる変数を引数に記して

$$\begin{aligned}\Omega(q_1,q_2)&:=\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\ ,\\ \overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2)&:=\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial Q_2}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial Q_2}\end{aligned}$$

とあらわすことにすれば[*2]，この関数変換は

$$\Omega(q_1,q_2)U=\Omega(q_1,q_2)\widetilde{U}=\overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2)\widetilde{U}$$

と書き換えられる．留意すべき点は，$\overline{\Omega}$ は一意に決定することができないところである．これは微分される関数の形式に依存している．先にも見たように，$V=V(q_1,q_2,r)$ というもうひとつの変数 r を持っている関数の場合，$\widetilde{V}=\widetilde{V}(Q_1,Q_2,R)$ となるから，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\right)V&=\left(\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\widetilde{V}\\ &=\left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial Q_2}+\frac{\partial R}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial R}+\frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial Q_2}+\frac{\partial R}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial R}\right)\widetilde{V}\end{aligned}$$

となって

$$\Omega(q_1,q_2)V=\Omega(q_1,q_2)\widetilde{V}=\overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2,R)\widetilde{V}$$

となる．関数変換前の演算子部分は同じであっても，演算子が作用する関数の変数引数が異なれば，関数変換後の演算子部分も異なるのである．以上の事柄は，次のように変数引数も合わせて記すと明瞭になる：

$$\begin{aligned}\Omega(q_1,q_2)U(q_1,q_2)&=\Omega(q_1,q_2)\widetilde{U}(Q_1,Q_2)=\overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2)\widetilde{U}(Q_1,Q_2)\ ,\\ \Omega(q_1,q_2)V(q_1,q_2,r)&=\Omega(q_1,q_2)\widetilde{V}(Q_1,Q_2,R)=\overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2,R)\widetilde{V}(Q_1,Q_2,R)\end{aligned}\tag{4.1}$$

変換を図式化すれば次のようにあらわされる：

$$\begin{aligned}\Omega(q_1,q_2)U(q_1,q_2)\quad&\longmapsto\quad\overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2)\widetilde{U}(Q_1,Q_2)=\Omega(q_1,q_2)\widetilde{U}(Q_1,Q_2)\ ,\\ \Omega(q_1,q_2)V(q_1,q_2,r)\quad&\longmapsto\quad\overline{\Omega}(q_1,q_2,Q_1,Q_2,R)\widetilde{V}(Q_1,Q_2,R)=\Omega(q_1,q_2)\widetilde{V}(Q_1,Q_2,R)\ .\end{aligned}$$

Ω であらわした演算子は，一般には様々な微分形で構成される（例えばのちに出てくるナブラ $\boldsymbol{\nabla}$ やラプラシアン $\triangle$ などが代表的であるし，もちろん $\partial^2/\partial x^2+\partial/\partial t$ のような各種微分演算子の結合形であってももちろん構わない）．その際においても，Ω が作用する関数の関数変換は (4.1) (p.25) に則って計算をすれば良い．その正当性は chain rule によって支えられている．

[*2] 念の為．これは $\widetilde{\Omega}$ の誤植ではない．本書では，$\widetilde{\ }$ という記号は，$\widetilde{L}(Q)=L(q)=L(q\to\varphi(Q))=L(\varphi(Q))$ という意味で使っている．そしてここの Ω の変換は $\widetilde{\Omega}(Q)=\Omega(q\to\varphi(Q))=\Omega(\varphi(Q))$ という操作ではなく，あくまでも chain rule の適用の結果なのである．それゆえ $\overline{\Omega}$ を用いている．

4.3　微分形の不変性

$q_* \to Q_*$ という変数変換のもとでの関数変換の不変性は，2 章（p.5）でみたように

$$\widetilde{L}(Q_*) = L(Q_*) = L(q_*)$$

であった．微分形の関数の場合でもこれを基本に考える．

$L(q_*) := \Omega(q_*)U(q_*)$ としよう．関数変換は

$$L(q_*) = \Omega(q_*)U(q_*) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(Q_*) = \overline{\Omega}(q_*, Q_*)\widetilde{U}(Q_*) = \Omega(q_*)U(q_*)$$

であったから，これが不変であるすなわち $\widetilde{L}(Q_*) = L(Q_*)$ ということは

$$\overline{\Omega}(q_*, Q_*)\widetilde{U}(Q_*) = \Omega(Q_*)U(Q_*) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\Omega}(q_*, Q_*) = \Omega(Q_*) \quad \text{かつ} \quad \widetilde{U}(Q_*) = U(Q_*)$$

が成り立つということに他ならない．つまり，不変であるときは $\Omega(q_*)U(q_*) = \Omega(Q_*)U(Q_*)$ ということになる．これは操作的には，$\Omega(q_*)U(q_*)$ の全ての q を Q に置き換えても等しい，ということを意味している．

さらにまた

$$\Omega(q_*)U(q_*) \quad \longmapsto \quad \overline{\Omega}(q_*, Q_*)\widetilde{U}(Q_*) = \Omega(q_*)\widetilde{U}(Q_*)$$

でもあったから，$\overline{\Omega}(q_*, Q_*) = \Omega(Q_*) = \Omega(q_*)$ つまり Ω が不変であるとき，

$$\Omega(q_*)\widetilde{U}(Q_*) = \Omega(q_*)U(q_*) = \Omega(Q_*)\widetilde{U}(Q_*)$$

となって，$\Omega(q_*)U(q_*)$ の不変性は $U(q_*)$ の不変性に委ねられることになる．

> 先の V の場合でも全く同様になる．$L(q_*, r) := \Omega(q_*)V(q_*, r)$ とすれば関数変換は
>
> $$L(q_*, r) = \Omega(q_*)V(q_*, r) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(Q_*, R) = \overline{\Omega}(q_*, Q_*, R)\widetilde{V}(Q_*, R) = \Omega(q_*)V(q_*, r)$$
>
> であり，不変であるならば
>
> $$\begin{aligned} \widetilde{L}(Q_*, R) = L(Q_*, R) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{\Omega}(q_*, Q_*, R)\widetilde{V}(Q_*, R) = \Omega(Q_*)V(Q_*, R) \\ &\Longleftrightarrow \quad \overline{\Omega}(q_*, Q_*, R) = \Omega(Q_*) \quad \text{かつ} \quad \widetilde{V}(Q_*, R) = V(Q_*, R) \end{aligned}$$
>
> つまり，$\Omega(q_*)V(q_*, r) = \Omega(Q_*)V(Q_*, R)$ が成り立つということである．

4.4　微分形の共変性

微分形の共変性も 3 章（p.15）の理路が踏襲できる．共変性の条件は

$$\begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix} \quad , \quad \Phi \begin{pmatrix} L(q_1) \\ L(q_2) \\ \vdots \\ L(q_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(Q_1) \\ L(Q_2) \\ \vdots \\ L(Q_n) \end{pmatrix}$$

であった．ここで

$$L(q_i) = \Omega(q_*)U(q_i)$$

という形式であらわすことができるとすれば

$$\begin{pmatrix}\Omega(q_*)U(q_1)\\ \Omega(q_*)U(q_2)\\ \vdots\\ \Omega(q_*)U(q_n)\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}\Omega(Q_*)U(Q_1)\\ \Omega(Q_*)U(Q_2)\\ \vdots\\ \Omega(Q_*)U(Q_n)\end{pmatrix}\ ,\quad \varPhi\begin{pmatrix}\Omega(q_*)U(q_1)\\ \Omega(q_*)U(q_2)\\ \vdots\\ \Omega(q_*)U(q_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Omega(Q_*)U(Q_1)\\ \Omega(Q_*)U(Q_2)\\ \vdots\\ \Omega(Q_*)U(Q_n)\end{pmatrix}$$

となる．

4.5　波動方程式

空間を 1 次元（x 座標のみ）とした時，速度 v で動く波動方程式は

$$\Psi(t,x):=\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x)=0$$

であり，演算子法[*3]という処方を用いれば

$$\Psi(t,x)=\left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right\}\psi(t,x)=0$$

とあらわすことができる．

この波動方程式が変数変換される場合を考えよう．変数変換 $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}:\{\,t,x\,\}\quad\longmapsto\quad\{\,t',x'\,\}$$

での方程式の関数変換は

$$\Psi(t,x)\quad\longmapsto\quad\widetilde{\Psi}(t',x')=\left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t',x')$$

となる．偏微分の対象となる $\widetilde{\psi}$ は t',x' の関数であるから，chain rule を用いると，

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}(t',x')}{\partial t}=\frac{\partial\widetilde{\psi}(t',x')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{\psi}(t',x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\ ,$$

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}(t',x')}{\partial x}=\frac{\partial\widetilde{\psi}(t',x')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}+\frac{\partial\widetilde{\psi}(t',x')}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}\ .$$

したがって，

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}$$

という演算子が得られる．これを用いることにより，波動方程式は

$$\Psi(t,x)\quad\longmapsto\quad\widetilde{\Psi}(t',x')=\left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2-\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t',x')$$

と変換されることになる．

[*3] 簡単に言えば，偏微分を演算子ととらえることにより，高階偏微分について代数的な演算が可能になることを言う．例えば何らかの計算によって $\dfrac{\partial}{\partial x}=\alpha\dfrac{\partial}{\partial\xi}+\beta\dfrac{\partial}{\partial\eta}$　（α,β は定数）と求まったとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2&=\alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2+2\alpha\beta\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\beta^2\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\\&=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\end{aligned}$$

という計算によって高階偏微分 $\partial^2/\partial x^2$ を求める処方である．

□ ローレンツ変換の場合

ローレンツ変換での変数変換 $\mathcal{T} : \{\, t, x \,\} \longmapsto \{\, t', x' \,\}$ の形式は，これまでに見てきたように

$$t' = \gamma\Big(t - \frac{\beta}{c}x\Big)\ ,\quad x' = \gamma\Big(x - \beta ct\Big)$$

である[*4]．偏微分演算は各々

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t'}{\partial t} &= \gamma\ , & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -\gamma\beta c\ ,\\
\frac{\partial t'}{\partial x} &= \frac{\gamma\beta}{c}\ , & \frac{\partial x'}{\partial x} &= -\gamma
\end{aligned}$$

となとなり，その結果

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 = \frac{1}{v^2}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\ ,\\
&\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 = \left(\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2
\end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\\
&= \frac{1}{v^2}\left(\gamma\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \left(\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\\
&= \frac{1}{v^2}\left\{\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - 2\gamma^2\beta c\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma^2\beta^2c^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\} - \left\{\frac{\gamma^2\beta^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - 2\frac{\gamma^2\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\\
&= \gamma^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\beta^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 + 2\gamma^2\beta\left(\frac{1}{c} - \frac{c}{v^2}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma^2\left(\frac{\beta^2c^2}{v^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2
\end{aligned}$$

となるから

$$\widetilde{\Psi}(t', x') = \left\{\gamma^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\beta^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 + 2\gamma^2\beta\left(\frac{1}{c} - \frac{c}{v^2}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma^2\left(\frac{\beta^2c^2}{v^2} - 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t', x')\ .$$

波動の速度が c であるときには（つまり $v = c$ であるときには）

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(t', x') &= \left\{\frac{\gamma^2(1-\beta^2)}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 + 2\gamma^2\beta\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + \gamma^2(\beta^2 - 1)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t', x')\\
&= \left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t', x')\\
&= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\widetilde{\psi}(t', x')\ .
\end{aligned}$$

ここでもし ψ がローレンツ変換で不変，すなわち

$$\psi(t, x) \quad\longmapsto\quad \widetilde{\psi}(t', x') = \psi(t', x')$$

[*4] 備忘録：$\beta := V/c,\ \gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$

であるならば[*5]

$$\Psi(t,x) \quad \longmapsto \quad \widetilde{\Psi}(t',x') = \Psi(t',x')$$

となり，波動方程式も不変になる[*6].

□ ガリレイ変換の場合

ガリレイ変換での変数変換 $\mathcal{T}:\{\,t,x\,\}\longmapsto\{\,t',x'\,\}$ は

$$\begin{aligned} t' &= t\ , \\ x' &= x - Vt \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1\ , \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -V\ , \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= 0\ , \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 &= \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\ , \\ \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \\ &\quad = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - V\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \\ &\quad = \frac{1}{v^2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - 2V\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} + V^2\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\} - \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \\ &\quad = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - 2\frac{V}{v^2}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} - \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 \end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}(t',x') &= \left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - 2\frac{V}{v^2}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'} - \left(1 - \frac{V^2}{v^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t',x') \\ &= \left\{\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2\right\}\widetilde{\psi}(t',x') + \left\{\frac{V^2}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - 2\frac{V}{v^2}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x'}\right\}\widetilde{\psi}(t',x')\ . \end{aligned}$$

この結果から，$V \neq 0$ のときは余分な項が存在して不変にはならないことがわかる．波動方程式はガリレイ変換に対しては不変にはならない[*7].

[*5] このような波動 ψ は**スカラー波**と呼ばれる．

[*6] 歴史的には，発見と論理の順番が逆である．簡単に言えば，波動方程式（なかんづくマックスウェル方程式）を不変にする変換は何か，というところからローレンツ変換が導き出されたと言って良い．そしてそれは特殊相対性理論を経て 4 元ベクトルやミンコフキー空間の幾何学という形で整備されてきたのである．

[*7] $V=0$ のときは不変となるけれども，それは変換しないガリレイ変換であって，不変性は自明の事柄である．

第 5 章　マックスウェル方程式と変換

5.1　マックスウェル方程式と電磁波の波動方程式

理論の出発点をマックスウェル方程式にして，電磁波の波動方程式の導出までを簡単におさらいしておこう．

5.1.1　マックスウェル方程式

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を電場，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ を磁束密度，$\rho(\boldsymbol{r},t)$ を電荷密度，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ を電流密度とする（$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル）．関数形の表現からわかるように，これら全ては場の各点 $\boldsymbol{r}$ と時間の関数である（「場の量」とも言われる）．$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$ はベクトル量，ρ はスカラー量である．

真空中のマックスウェル方程式は次のように与えられる（ε_0 は真空中の誘電率，μ_0 は真空中の透磁率と呼ばれる定数）[*1]．[*2]：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,, \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{5.4}$$

(5.1) (p.31) ，(5.2) (p.31) は，場がスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを持つ条件である（ランダウ＝リフシッツ流に言えば，第一の組）．(5.3) (p.31) ，(5.4) (p.31) は，場が電荷密度（分布），電流密度（分布）から作られる条件である（同じく，第二の組）[*3]．

5.1.2　マックスウェル方程式から演繹されるもの

□ 連続の方程式

(5.4) (p.31) に左から $\boldsymbol{\nabla}$ を作用させて内積をとると，

$$（左辺）= \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) - \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$（右辺）= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}$$

[*1] ベクトル解析記号の意味合いは，付録 A (p.55) を参照．

[*2] 物質中も考えると，電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を含めた形式の方が一般的であって，その場合のマックスウェル方程式は，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0\,,\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0}\,,\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = \rho\,,\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

となる．真空中であれば（すなわち真空の条件は）$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ である．

[*3] (5.1) は「磁場に対するガウスの法則（モノポールが存在しないことを示す式と言われることがある）」，(5.2) は「ファラデーの電磁誘導の法則」，(5.3) は「電場に対するガウスの法則」，(5.4) は「マックスウェル・アンペールの（変位電流の）法則」，と言われる．

であるから

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\,.$$

これは，点 $\boldsymbol{r}$ での電荷密度の時間による減少が，その点 $\boldsymbol{r}$ での電流の発散に等しいという**連続の方程式（電荷保存の方程式）**である．

□ 電場と磁束密度の波動方程式

電場と磁束密度の波動方程式が導かれることを確認しよう．(5.2) (p.31) の両辺に $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させると，左辺は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) &= \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&= \{\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \triangle\boldsymbol{E}\} + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\\
&= \left\{\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right) - \triangle\boldsymbol{E}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0\boldsymbol{j}\right)\\
&= \left(-\triangle + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\rho + \mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}
\end{aligned}$$

となる．右辺はもちろん $\boldsymbol{0}$ であるから，形を整理してまとめると[*4]

$$\Box\boldsymbol{E} = \left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\rho + \mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\,. \tag{5.5}$$

同様に (5.4) (p.31) の両辺に $\boldsymbol{\nabla}\times$ を作用させる．左辺は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) - \varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\
&= \frac{1}{\mu_0}\{\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \triangle\boldsymbol{B}\} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})\\
&= -\frac{1}{\mu_0}\triangle\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{\mu_0}\triangle + \varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

であり，右辺は $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}$ となるから

$$\Box\boldsymbol{B} = \left(\triangle - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} = -\mu_0\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{j}\,. \tag{5.6}$$

□ ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル

ベクトル解析の定理から，(5.1) (p.31) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ において

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

というベクトル $\boldsymbol{A}$ が存在するということが言える．これをベクトルポテンシャルと呼ぶ．この事実を (5.2) (p.31) に用いると

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{0}$$

[*4] $\Box = \triangle - \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ はダランベール演算子（ダランベルシアアン）と呼ばれる．

となる．この結果から（やはりベクトル解析の定理を用いて）

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$$

となるスカラー ϕ が存在することがわかる．これはスカラーポテンシャルと呼ばれる．

この 2 つの結果を用いれば

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi-\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\triangle\phi-\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

であり，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)\\&=\frac{1}{\mu_0}\left(\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}\right)+\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\phi)+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\right)\\&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\frac{1}{\mu_0}\triangle\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\\&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\right)\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

となる．したがって，マックスウェル方程式 (5.3) (p.31) ， (5.4) (p.31) は $\boldsymbol{A}$ と ϕ を使って次のようにまとめられる：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \iff \triangle\phi+\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,, \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j} &\iff \left(\triangle-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j}\\&\iff \Box\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{j}\,.\end{aligned} \tag{5.8}$$

5.1.3　電気的なみなもとがない場合

真空中で，電荷密度 $\rho=0$，電流密度 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$ という場合（空間中に「電気的みなもと」が何もない，という風に解釈する）の式をまとめておく．

マックスウェル方程式は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}&=0\,,\\\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}&=\boldsymbol{0}\,,\\\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}&=0\,,\\\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}&=\boldsymbol{0}\,.\end{aligned}$$

電場と磁束密度の波動方程式は

$$\begin{aligned}\Box\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{0}\,,\\\Box\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

ということになる[*5]．$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ は波動方程式を満たす量（波動量）なのである．

[*5] これは位相速度の大きさ（つまり速さ）が $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で進む波の波動方程式となっている．そしてこの速さが電磁波の速さすなわち光の速さ c_0 であって（昨今では，これを c_0 と書くことが推奨されている）

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\quad(=2.99792458\times10^8\ \mathrm{m/s})$$

電磁ポテンシャル関数を用いれば

$$\triangle\,\phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0\,,$$
$$\Box\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \boldsymbol{0}\,.$$

5.2　ゲージ変換

5.2.1　波動方程式の不変性

電磁場のゲージ変換（2.3 節（p.8））のところで見たように，ポテンシャル関数にはゲージ変換による不定性があった．$\lambda = \lambda(\boldsymbol{r}, t)$ によるゲージ変換

$$\mathcal{G} : \{\,\phi, \boldsymbol{A}\,\} \quad \longmapsto \quad \{\,\phi^g, \boldsymbol{A}^g\,\}\ ,$$
$$\begin{cases} \phi^g = \phi - \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} =: G_\phi(\phi, \boldsymbol{A}, \lambda) \\ \boldsymbol{A}^g = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\lambda =: G_A(\phi, \boldsymbol{A}, \lambda) \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi = \phi^g + \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} =: g_\phi(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda) \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda =: g_A(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda) \end{cases}$$

で結びついているもうひとつ別のポテンシャル関数 ϕ^g, $\boldsymbol{A}^g$ を用いても $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は変わらないのであった．それゆえ ϕ^g, $\boldsymbol{A}^g$ を使っても

$$\triangle\,\phi^g + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}^g}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$
$$\Box\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^g + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^g}{\partial t}\right) = -\mu_0\boldsymbol{j}$$

となる．事実ゲージ変換で不変であることを，関数変換の図式に乗せて確認しておこう．

$$f(\phi, \boldsymbol{A}) := \triangle\phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \quad \longmapsto \quad \widetilde{f}(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) = f(\phi, \boldsymbol{A}) = f(g_\phi(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda),\ g_A(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda))$$

という変換を考える．変換される変数は $\phi, \boldsymbol{A}$ であり，座標変数は変換の対象ではないので演算子 $\triangle, \boldsymbol{\nabla}$ は変わらないということを念頭において

$$\begin{aligned} f(\phi, \boldsymbol{A}) &= f(g_\phi(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda),\ g_A(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda)) \\ &= f\left(\phi^g + \frac{\partial\lambda}{\partial t},\ \boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda\right) \\ &= \triangle\left(\phi^g + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda\right) \\ &= \triangle\phi^g + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}^g}{\partial t} + \left(\triangle\frac{\partial\lambda}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\lambda\right) \\ &= \triangle\phi^g + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}^g}{\partial t} \\ &= f(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) \end{aligned}$$

と求まる．つまり不変．同様にして

$$\boldsymbol{F}(\phi, \boldsymbol{A}) := \Box\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \longmapsto \widetilde{\boldsymbol{F}}(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) = \boldsymbol{F}(\phi, \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{F}(g_\phi(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda),\ g_A(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda))$$

で与えられ，「定義値」として取り扱われる．光速はイグザクトにこの値なのである（光速は「整数」）．現在においては，まず c_0 をこのように定義して，それから種々の物理量を求めるという道筋が立っている．例えば，この光速の定義からも明らかであるが，長さの単位のメートルは，真空中で光が 1/299792458 秒の間に進む長さと決めらている（1983 年かららしい）．真空中の透磁率も $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ と定義されている．したがって真空中の誘電率も定義値であり $\varepsilon_0 = 8.854187817620\cdots\times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$. 因みに，H は「ヘンリー」，F は「ファラッド」という SI 組立単位である．

であって

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\phi, \boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{F}(g_\phi(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda),\ g_A(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda)) \\
&= \boldsymbol{F}\left(\phi^g + \frac{\partial \lambda}{\partial t},\ \boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda\right) \\
&= \Box(\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda) - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^g + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)\right) \\
&= \Box\boldsymbol{A}^g - \Box\boldsymbol{\nabla}\lambda - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^g - \triangle\lambda + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^g}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right) \\
&= \Box\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^g + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^g}{\partial t}\right) + \left\{-\Box\boldsymbol{\nabla}\lambda + \boldsymbol{\nabla}\Box\lambda\right\} \\
&= \Box\boldsymbol{A}^g + \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^g + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^g}{\partial t}\right) \\
&= \boldsymbol{F}(\phi^g, \boldsymbol{A}^g)
\end{aligned}$$

となることからこれも不変であることがわかる．

以上から，マックスウェル方程式と同値であるポテンシャル関数を用いてあらわした波動方程式 (5.7) (p.33) ，(5.8) (p.33) ，あらためて書き示すと

$$\begin{aligned}
\triangle\,\phi + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\
\Box\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

も電磁場のゲージ変換で不変であることがわかる[*6]．

5.2.2　ゲージ固定

ゲージ変換を施してもマックスウェル方程式は不変であったから，ゲージ変換で結びついた 2 つのポテンシャル関数の組み $(\phi, \boldsymbol{A}), (\phi^g, \boldsymbol{A}^g)$ それぞれにおいて

$$\begin{aligned}
\Box\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0\boldsymbol{j} \\
\Box\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^g + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^g}{\partial t}\right) &= -\mu_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで

$$P(\phi, \boldsymbol{A}) := \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

としよう．一般にはこの $P(\phi, \boldsymbol{A})$ は 0 になるとは限らないけれども，ゲージ変換を利用して $P(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) = 0$ となるポテンシャル関数の組みを探し出すことができる．実際，ゲージ変換による P の関数変換を考えると

$$\begin{aligned}
P(\phi, \boldsymbol{A}) \quad \longmapsto \quad \widetilde{P}(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) &= P(\phi, \boldsymbol{A}) = P(g_\phi(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda),\ g_A(\phi^g, \boldsymbol{A}^g, \lambda)) \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}^g - \boldsymbol{\nabla}\lambda) + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^g + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^g + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi^g}{\partial t} - \left(\triangle\lambda - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right) \\
&= P(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) - \Box\lambda
\end{aligned}$$

[*6] もちろん (5.5) (p.32) ，(5.6) (p.32) も電磁場のゲージ変換に対して不変である．$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ もゲージ変換に対して不変であった事実から当然であるし，必要ならば変換の図式に乗せて計算を実行して見れば良い．

となるから

$$P(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(\phi, \boldsymbol{A}) = -\Box\lambda$$

であることになる．逆に考えれば，これを満たす λ を使って $\phi, \boldsymbol{A}$ をゲージ変換すれば $P(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) = 0$ を満たすポテンシャル関数が得られる，ということになる[*7] [*8]．したがって以降ではこの条件を満たす $\phi^g, \boldsymbol{A}^g$ を改めて $\phi, \boldsymbol{A}$ とすることにしよう．すなわち

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\ . \tag{5.9}$$

この条件 (5.9) (p.36) を**ローレンツ条件**，**ローレンツゲージ**（または**ローレンツゲージに固定する**）と言う[*9]．

ローレンツ条件を t で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

となる．したがって，ローレンツゲージに固定された場合には，(5.7) (p.33) ，(5.8) (p.33) のマックスウェル方程式は次のようになる：

$$\Box\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\ , \tag{5.10}$$

$$\Box\boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{j}\ . \tag{5.11}$$

ゲージを固定しても，連続の方程式（電荷保存の方程式）が成り立つことを確認しておこう．(5.11) (p.36) のベクトルの部分を成分ごとに書くと

$$\begin{aligned}\Box A_x &= -\mu_0 j_x\ ,\\ \Box A_y &= -\mu_0 j_y\ ,\\ \Box A_z &= -\mu_0 j_z\end{aligned}$$

であり，各々をその成分指標で偏微分し，かつ，ダランベール演算子との順序を交換すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\Box A_x) = -\mu_0 \frac{\partial j_x}{\partial x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Box\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) = -\mu_0 \frac{\partial j_x}{\partial x}\ ,\\ \frac{\partial}{\partial y}(\Box A_y) = -\mu_0 \frac{\partial j_y}{\partial y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Box\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) = -\mu_0 \frac{\partial j_y}{\partial y}\ ,\\ \frac{\partial}{\partial z}(\Box A_z) = -\mu_0 \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Box\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = -\mu_0 \frac{\partial j_z}{\partial z}\end{aligned}$$

となる．一方で (5.10) (p.36) を t で偏微分し，定数係数を調整して

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Box\phi) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \Longleftrightarrow \quad \Box\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \Longleftrightarrow \quad \Box\left(\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

---

*7 これが上に述べた「探し出すことができる」ということの論拠である．λ の満たすべき条件が波動方程式の形式であるから，その λ は存在すると言って良いとわたくしは思うのだけれど，前原 [7] の第 9，10 章ではのちに述べるローレンツゲージに絡めて深い洞察が記されている．とても興味深い論説である（さらにまた，物理学者は存在証明に関心がない（p.131），とも仰せられている）．また山本・中村 [5, p.557] にもこの存在についての言及がある．徳永・岡村 [9, p.228, 229] でもこの点にふれている．

*8 より強い制限として，$\triangle\lambda - \varepsilon_0\mu_0 \cdot \partial^2\lambda/\partial t^2 = 0$ を課すことも考えられる．この λ を採用すれば，$P(\phi^g, \boldsymbol{A}^g) = P(\phi, \boldsymbol{A}) = 0$ となる．

*9 このローレンツは，ローレンツ変換のロレーンツとは別人である．ローレンツ変換の方はオランダの物理学者ヘンドリック・アントーン・ローレンツ（Hendrik Antoon Lorentz、1853 年 7 月 18 日 - 1928 年 2 月 4 日）である．ローレンツ条件はデンマークの物理学者，数学者であるルードヴィヒ・ローレンツ（Ludvig Valentin Lorenz 、1829 年 1 月 18 日 - 1891 年 6 月 9 日)。ローレンスと表記されることもある。

が得られる．これらを全て加え合わせると

$$\Box\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)+\Box\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)+\Box\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)+\Box\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial x}-\mu_0\frac{\partial j_y}{\partial y}-\mu_0\frac{\partial j_z}{\partial z}-\mu_0\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\therefore\quad \Box\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

$$\therefore\quad \Box\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

となり，左辺はローレンツ条件から 0 であるので

$$0=-\mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)\quad\Longleftrightarrow\quad\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

というように連続の方程式が導出できる．そもそも理論の出発点としたマックスウェル方程式が連続の方程式を満たしていたのだから，ゲージを固定しても連続の方程式が満たされるということは，極めて当然の事柄である．

　ゲージ固定の手法はローレンツゲージでけではない．ベクトルポテンシャルの選択において

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{5.12}$$

となるものを採用することをクーロンゲージ（またはロンドンゲージ）固定という．両辺を t で微分して $\dfrac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})=0$ が得られるので

$$(5.7)(p.33)\quad\Longleftrightarrow\quad \triangle\phi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\ , \tag{5.13}$$

$$(5.8)(p.33)\quad\Longleftrightarrow\quad \Box\boldsymbol{A}-\varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\boldsymbol{j}\ . \tag{5.14}$$

ρ に関してはポアソン方程式の形である．静電場における電位の定義である．

　マックスウェル方程式が連続の方程式を内包しているのであるから，クーロンゲージ固定の場合でも連続の方程式が成り立つことはあきらかである．実際，ローレンツゲージの場合と同様にして (5.14) (p.37) を

$$\Box A_x-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0 j_x\ ,$$

$$\Box A_y-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0 j_y\ ,$$

$$\Box A_z-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0 j_z$$

と成分ごとに書きあらため偏微分することにより

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Box A_x-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial x}\quad\Longleftrightarrow\quad\Box\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial x}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Box A_y-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial j_y}{\partial y}\quad\Longleftrightarrow\quad\Box\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial j_y}{\partial y}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Box A_z-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial j_z}{\partial z}\quad\Longleftrightarrow\quad\Box\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial j_z}{\partial z}$$

が得られ，これを加えあげることによって

$$\Box\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\left(\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Box(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\varepsilon_0\mu_0\,\triangle\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\right)\quad\Longleftrightarrow\quad\Box(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\triangle\phi\right)=-\mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\right)$$

となる．最後の結果にクーロンゲージの条件 (5.12) (p.37) と (5.13) (p.37) の結果を用いれば

$$-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right) = -\mu_0\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\,.$$

5.3 ローレンツ変換と共変量

5.3.1 ポテンシャル関数の共変性

ローレンツ変換のもとでのポテンシャル関数の変換を見ることにしよう．ローレンツ変換の座標空間部分は z 軸方向にのみあるとして一般性は失われない．このローレンツ変換は

$$S(ct,x,y,z) \quad\longmapsto\quad S'(ct',x',y',z')\,, \quad \begin{cases} ct'=\gamma(ct-\beta z) \\ x'=x \\ y'=y \\ z'=\gamma(z-\beta ct)\end{cases}\,, \quad \begin{cases} ct=\gamma(ct'+\beta z') \\ x=x' \\ y=y' \\ z=\gamma(z'+\beta ct')\end{cases}$$

とあらわされる[*10]．行列であらわせば

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =: \mathsf{L}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =: \mathsf{L}^{-1}\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

である．各々の行列は互いに逆行列の関係にある．

ローレンツ変換の変数変換は $\{\,t,x,y,z\,\}\mapsto\{\,t',x',y',z'\,\}$ とするものであった．この変換のもとでは，ポテンシャル関数は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(t,x,y,z) &\quad\longmapsto\quad \boldsymbol{A}'(t',x',y',z'), \\ \phi(t,x,y,z) &\quad\longmapsto\quad \phi'(t',x',y',z') \end{aligned}$$

と変換される．この変換においては追加される変数はない．したがって演算子の各々は chain rule を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\,, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}\,, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = -\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\,, \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} = \gamma\frac{\partial}{\partial t'}-\gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z'}\,,
\end{aligned}$$

[*10] 今まで見てきたローレンツ変換に若干の細工，つまり ct を変数に見立てる細工を行った．こうすることによってすべの変数の次元が揃う．これは特殊相対性理論で用いられる共変性形式（4 元ベクトル形式）を睨んでのことでもある．もちろん $\beta := V/c$, $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$ であることには変わりはない．

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} \ ,$$
$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z}$$

という関係にある．

S においてポテンシャル関数にゲージ変換を施してもマックスウェル方程式は不変であった．S' においてもそれが成り立つことを要請することは自然である．その考察から，S, S' どちらにおいてもローレンツ条件が成立することが導かれる．すなわちローレンツ条件は，ローレンツ変換を施しても不変であると結論づけられる．ローレンツ条件の関数変換は，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad\longmapsto\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t}$$

であり，関数形が不変であることを要請すると（4.3 節（p.26）で見たように）

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t'} \tag{5.15}$$

となる[*11]．微分を S' の変数に統一すると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{\partial A_x}{\partial x'} + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \left(-\gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t'} + \gamma\frac{\partial A_z}{\partial z'}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\gamma\frac{\partial\phi}{\partial t'} - \gamma\beta c\frac{\partial\phi}{\partial z'}\right) \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial x'} + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\gamma\left(A_z - \frac{\beta}{c}\phi\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial t'}\left\{\gamma\left(\frac{1}{c^2}\phi - \frac{\beta}{c}A_z\right)\right\} \ , \\
\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t'} &= \frac{\partial A'_x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_y}{\partial y'} + \frac{\partial A'_z}{\partial z'} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t'}
\end{aligned}$$

であるから，(5.15) (p.39) が成り立つためには

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\phi' = \gamma\left(\frac{1}{c^2}\phi - \frac{\beta}{c}A_z\right) \iff \frac{1}{c}\phi' = \gamma\left(\frac{1}{c}\phi - \beta A_z\right) \ , \\
&A'_x = A_x \ , \\
&A'_y = A_y \ , \\
&A'_z = \gamma\left(A_z - \beta c\left(\frac{1}{c^2}\phi\right)\right) = \gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)
\end{aligned}$$

という条件が必要になってくる．すなわち

$$\begin{pmatrix}\phi'/c \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z\end{pmatrix} \tag{5.16}$$

であり，$(\phi/c, A_x, A_y, A_z)$ は (ct, x, y, z) のローレンツ変換と同じ変換規則で変換されることがわかる．つまりローレンツ変換に対して共変な量なのである．

5.3.2　連続の方程式

S でのマックスウェル方程式は連続の方程式を内包していた．S' においても連続の方程式が成り立つことを要請しよう．これは物理的な洞察による要請である[*12]．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

[*11] $\boldsymbol{\nabla}' := \hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{\partial}{\partial y'} + \hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{\partial}{\partial z'}$. S' 系の 3 次元空間座標軸の単位ベクトルが S 系と同じであると考えることは，一考を要する事柄である．

[*12] ローレンツ条件不変であるという事柄はある意味数学的な要請であったのに対し，この連続の方程式（電荷保存の方程式）が不変であるという要請は物理的洞察にのみもとづくと考えてよいと思う．何か他の条件から導き出せるものではないように思える．

が不変であるとするのだから

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}'+\frac{\partial\rho'}{\partial t}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}&=\frac{\partial j_x}{\partial x'}+\frac{\partial j_y}{\partial y'}+\left(-\gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial j_z}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial j_z}{\partial z'}\right)+\left(\gamma\frac{\partial\rho}{\partial t'}-\gamma\beta c\frac{\partial\rho}{\partial z'}\right)\\&=\frac{\partial j_x}{\partial x'}+\frac{\partial j_y}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\left\{\gamma\left(j_z-\beta c\rho\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\gamma\left(\rho-\frac{\beta}{c}j_z\right)\right\}\ ,\\\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{j}'+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}&=\frac{\partial j_x'}{\partial x'}+\frac{\partial j_y'}{\partial y'}+\frac{\partial j_z'}{\partial z'}+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}&\rho'=\gamma\left(\rho-\frac{\beta}{c}j_z\right)\iff c\rho'=\gamma\left(c\rho-\beta j_z\right)\\&j_x'=j_x\ ,\\&j_y'=j_y\ ,\\&j_z'=\gamma\left(j_z-\beta c\rho\right)\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{pmatrix}c\rho'\\j_x'\\j_y'\\j_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\rho\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}\tag{5.17}$$

であり，$(c\rho,j_x,j_y,j_z)$ もローレンツ変換に対して共変な量となっていることが導出できる．

5.3.3　波動方程式の不変性

まず，ローレンツ変換でのダランベール演算子の性質を見ておこう．演算子法を援用すれば（$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$）

$$\Box=\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\boldsymbol{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left(\boldsymbol{\nabla}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

というように分解できる．ローレンツ変換での偏微分の関係をあてはめると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}&=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{\boldsymbol{z}}\left\{-\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\right\}+\frac{1}{c}\left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t'}-\gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z'}\right\}\ ,\\\boldsymbol{\nabla}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}&=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{\boldsymbol{z}}\left\{-\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\right\}-\frac{1}{c}\left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t'}-\gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z'}\right\}\end{aligned}$$

となる．以下，単調な計算で，まず $V:=\left\{-\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\right\}$ ， $W:=\frac{1}{c}\left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t'}-\gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z'}\right\}$ と置き，$\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}}$ の直交性を利用して

$$\begin{aligned}&\left(\boldsymbol{\nabla}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\\&\quad=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x'}W+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}-\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y'}W+VV-\hat{\boldsymbol{z}}VW+\hat{\boldsymbol{x}}W\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{\boldsymbol{y}}W\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{\boldsymbol{z}}WV-WW\\&\quad=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+VV-WW\end{aligned}$$

が得られる．さらに

$$VV = \left\{-\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma\frac{\partial}{\partial z'}\right\}^2 = \left(\frac{\gamma\beta}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{\gamma^2\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial z'} + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

$$WW = \frac{1}{c^2}\left\{\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\gamma^2\beta c\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial z'} + (\gamma\beta c)^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right\} = \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\frac{\gamma^2\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial z'} + (\gamma\beta)^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

であるので

$$VV - WW = \left\{\gamma^2 - (\gamma\beta)^2\right\}\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \left\{\left(\frac{\gamma\beta}{c}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\right\}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

となる．結果

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} =: \Box'$$

が得られ，ダランベール演算子がローレンツ変換のもとで不変であることがわかる[*13]．

(5.16) (p.39) ，(5.17) (p.40) を，行列部分を L とあらわして書きあらためると

$$\begin{pmatrix}\phi'/c\\A'_x\\A'_y\\A'_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

$$\begin{pmatrix}c\rho'\\j'_x\\j'_y\\j'_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}\begin{pmatrix}c\rho\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix} \tag{5.19}$$

となる．ここで (5.18) (p.41) に左側から $\Box'$ を作用させると

$$\Box'\begin{pmatrix}\phi'/c\\A'_x\\A'_y\\A'_z\end{pmatrix} = \Box'\mathsf{L}\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}\Box'\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}\Box\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$$

という結果が得られる（最後にダランベール演算子のローレンツ変換不変性を使った）．L^{-1} を用いれば

$$\Box\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}^{-1}\Box'\begin{pmatrix}\phi'/c\\A'_x\\A'_y\\A'_z\end{pmatrix}$$

となることはもちろんあきらか．したがって

$$\Box\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$$

も共変量なのである[*14]．さらに (5.19) (p.41) に定数 μ_0 を掛けて片々加え合わせると

$$\Box'\begin{pmatrix}\phi'/c\\A'_x\\A'_y\\A'_z\end{pmatrix} + \mu_0\begin{pmatrix}c\rho'\\j'_x\\j'_y\\j'_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}\left\{\Box\begin{pmatrix}\phi/c\\A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix} + \mu_0\begin{pmatrix}c\rho\\j_x\\j_y\\j_z\end{pmatrix}\right\} \tag{5.20}$$

[*13] (4.5) (p.27) 波動方程式の節，とりわけそのローレンツ変換の場合のささやかな一般化である．
[*14] 3 章（p.15）および 4.4 節（p.26）の理路を参照．

であって，かつ，共変量どうしの和であるから，これも共変量である．

ローレンツゲージ固定での波動方程式（ (5.10) (p.36) ，(5.11) (p.36) ）を今一度書きあらわせば

$$
\begin{aligned}
\Box\phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho &\iff&& \Box\left(\frac{\phi}{c}\right) + \mu_0 c\rho = 0\,, \\
\Box\boldsymbol{A} &= -\mu_0\boldsymbol{j} &\iff&& \Box\boldsymbol{A} + \mu_0\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

であったから (5.20) (p.41) は

$$
\Box'\begin{pmatrix}\phi'/c\\ A'_x\\ A'_y\\ A'_z\end{pmatrix} + \mu_0\begin{pmatrix}c\rho'\\ j'_x\\ j'_y\\ j'_z\end{pmatrix} = \mathsf{L}\left\{\Box\begin{pmatrix}\phi/c\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} + \mu_0\begin{pmatrix}c\rho\\ j_x\\ j_y\\ j_z\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
\Box'\left(\frac{\phi'}{c}\right) + \mu_0 c\rho' = 0 &\iff& \Box'\phi' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho'\,, \\
\Box'\boldsymbol{A}' + \mu_0\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{0} &\iff& \Box'\boldsymbol{A}' = -\mu_0\boldsymbol{j}'
\end{aligned}
$$

となって，波動方程式が不変であることが導かれるのである[*15]．

5.3.4　電場と磁束密度の変換

最後に，電場と磁束密度の混じり合った変換を見ておこう．

S' 系での磁束密度 $\boldsymbol{B}'$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{A}' &= \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'}\\ A'_x & A'_y & A'_z\end{vmatrix} = \hat{\boldsymbol{x}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'}\\ A'_y & A'_z\end{vmatrix} + \hat{\boldsymbol{y}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z'} & \dfrac{\partial}{\partial x'}\\ A'_z & A'_x\end{vmatrix} + \hat{\boldsymbol{z}}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'}\\ A'_x & A'_y\end{vmatrix} \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial}{\partial y'}A'_z - \frac{\partial}{\partial z'}A'_y\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial}{\partial z'}A'_x - \frac{\partial}{\partial x'}A'_z\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x'}A'_y - \frac{\partial}{\partial y'}A'_x\right)
\end{aligned}
$$

で与えられる．先に見た偏微分の関係と (5.16) (p.39) を用いれば[*16]

$$
\begin{aligned}
B'_x = \frac{\partial}{\partial y'}A'_z - \frac{\partial}{\partial z'}A'_y &= \frac{\partial}{\partial y'}\left\{\gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial z'}A_y \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} - \left\{\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right\}A_y \\
&= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) - \frac{\gamma\beta}{c}\left(\frac{\partial}{\partial y}\phi + \frac{\partial}{\partial t}A_y\right) \\
&= \gamma\left(B_x + \frac{\beta}{c}E_y\right)
\end{aligned}
$$

[*15] とかく，不変性と共変性は明確に区別されずに議論が進むことが多い．多くの教科書がそうであるように感じる．また，ローレンツ変換にもとづく力学や電磁気学，広く言えば相対論と場の古典論においては，ミンコフスキー空間をベースにした共変形式の方が見通しがいいかとは思う（反変ベクトルと共変ベクトルを利用する形式である．）．

[*16] 計算に利用する関係を列挙しておく．まずあきらかに

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\,.
$$

また $\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{A}/\partial t = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ より

$$
E_x + \frac{\partial}{\partial t}A_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi\,,\quad E_y + \frac{\partial}{\partial t}A_y = -\frac{\partial}{\partial y}\phi\,,\quad E_z + \frac{\partial}{\partial t}A_z = -\frac{\partial}{\partial z}\phi\,.
$$

となる．同様にして

$$
\begin{aligned}
B'_y = \frac{\partial}{\partial z'}A'_x - \frac{\partial}{\partial x'}A'_z &= \frac{\partial}{\partial z'}A_x - \frac{\partial}{\partial x'}\left\{\gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} \\
&= \left\{\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right\}A_x - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} \\
&= \gamma\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \frac{\gamma\beta}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}A_x + \frac{\partial}{\partial x}\phi\right) \\
&= \gamma\left(B_y - \frac{\beta}{c}E_x\right)\ , \\
B'_z = \frac{\partial}{\partial x'}A'_y - \frac{\partial}{\partial y'}A'_x &= \frac{\partial}{\partial x'}A_y - \frac{\partial}{\partial y'}A_x \\
&= \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \\
&= B_z\ .
\end{aligned}
$$

S' 系での電場 $\boldsymbol{E}'$ は

$$
\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{A}' = \hat{\boldsymbol{x}}\left(-\frac{\partial}{\partial x'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_x\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(-\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_y\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(-\frac{\partial}{\partial z'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_z\right)
$$

であり，再び偏微分の関係と (5.16) (p.39) を用いて

$$
\begin{aligned}
E'_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_x &= -\frac{\partial}{\partial x'}\{\gamma(\phi - \beta c A_z)\} - \frac{\partial}{\partial t'}A_x \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\{\gamma(\phi - \beta c A_z)\} - \left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z}\right\}A_x \\
&= \gamma\left(-\frac{\partial}{\partial x}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_x\right) - \gamma\beta c\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) \\
&= \gamma(E_x - \beta c B_y)\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E'_y = -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_y &= -\frac{\partial}{\partial y'}\{\gamma(\phi - \beta c A_z)\} - \frac{\partial}{\partial t'}A_y \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\{\gamma(\phi - \beta c A_z)\} - \left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z}\right\}A_y \\
&= \gamma\left(-\frac{\partial}{\partial y}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_y\right) + \gamma\beta c\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) \\
&= \gamma(E_y + \beta c B_x)\ .
\end{aligned}
$$

E'_z は少々厄介であるが，

$$
\begin{aligned}
E'_z &= -\frac{\partial}{\partial z'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_z \\
&= -\frac{\partial}{\partial z'}\{\gamma(\phi - \beta c A_z)\} - \frac{\partial}{\partial t'}\left\{\gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} \\
&= -\left\{\frac{\gamma\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right\}\{\gamma(\phi - \beta c A_z)\} - \left\{\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\beta c\frac{\partial}{\partial z}\right\}\left\{\gamma\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\gamma^2(\phi - \beta c A_z) + \gamma^2\beta c\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\gamma^2\beta}{c}(\phi - \beta c A_z) + \gamma^2\left(A_z - \beta\left(\frac{1}{c}\phi\right)\right)\right\} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}\{\gamma^2(1-\beta^2)\phi\} - \frac{\partial}{\partial t}\{\gamma^2(1-\beta^2)A_z\} \\
&= -\frac{\partial}{\partial z}\phi - \frac{\partial}{\partial t}A_z \\
&= E_z\ .
\end{aligned}
$$

まとめると，

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(E_x - \beta c B_y) \\ \gamma(E_y + \beta c B_x) \\ E_z \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\left(B_x + \dfrac{\beta}{c} E_y\right) \\ \gamma\left(B_y - \dfrac{\beta}{c} E_x\right) \\ B_z \end{pmatrix}$$

となり，絡み合いの具合がわかる．

第 6 章　点変換とオイラー・ラグランジュ方程式

6.1　点変換

位置変数のみを座標とする空間を配位空間（configuration sapce）[*1] と呼ぶ．そして，この配位空間において独立な座標の個数が n であるとき，配位空間の自由度は n であるという．自由度 n の配位空間で時刻 t での点は $P(t) := (q_i(t), q_2(t), \ldots, q_n(t))$ とあらわされる．

配位空間での座標変換（それは変数変換である）$\mathcal{T}$ を

$$\mathcal{T} : \{\, q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t) \,\} \quad \longmapsto \quad \{\, Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_n(t) \,\}$$

とあらわし，この変換が時間に直接的に依存する場合も考慮に入れて

$$Q_i(t) = Q_i(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), t) =: Q(q_*(t), t)$$

とあらわすことにしよう[*2]．ここで，この変換は可微分同相写像[*3] であることを仮定する．**点変換**はこのように定義される[*4]．したがって逆変換も存在して

$$q_i(t) = q_i(Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_n(t), t) =: q_i(Q_*(t), t) \ .$$

全微分は

$$dQ_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\, dt \ ,$$
$$dq_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\, dQ_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}\, dt \ .$$

以上から，Q_i, q_i の時間の完全導関数

$$\frac{dQ_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \quad \left(\text{時間微分を簡略化して} \quad \dot{Q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \right)$$
$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{dQ_j}{dt} + \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \left(\text{時間微分を簡略化して} \quad \dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \right)$$

[*1] 「空間」を表現するものを座標と呼ぶ，と考えるのが良い．すなわち，「空間」は全て「座標空間」であり，その座標が時と場合によって様々な量であらわされる，と考えるのである．馴染深い実際の物理的空間（ユークリッド空間）は，座標は全て位置変数であらわされる．ミンコフスキー空間になれば，座標は位置変数と時間変数の組になる．相空間（phase space）は，位置と運動量を座標とする空間である．

[*2] 本来ならば，$Q_i(t) = \mathit{\Phi}(q_1(t), \ldots, q_n(t), t)$ と書くほうが丁寧であるとは思うが，記号のインフレを避けるため，変数名と関数名を同じものにした．

[*3] 簡単に言えば，

U から V への写像 $\mathit{\Phi}$ において，$\mathit{\Phi}$ は微分可能であり，逆写像 $\mathit{\Phi}^{-1} : V \to U$ が存在し，$\mathit{\Phi}^{-1}$ が微分可能である

ということである．

[*4] 通常のユークリッド空間における座標回転ももちろん点変換のひとつである．極座標変換も同様．メリーゴーランドのような回転座標系は，時間に直接的に依存する点変換である（そこから「遠心力」や「コリオリの力」などが導出される．6.3.1 節（p.51）参照.）．

が導かれる．ここで，Q_i は $\dot{q}_*$ を含まないことから，その偏導関数 $\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_j}$ は $\dot{q}_*$ を含まない．$\dfrac{\partial Q_i}{\partial t}$ が $\dot{q}_*$ を含まないことはあきらか．同じことが q_i にも言えて，$\dfrac{\partial q_i}{\partial Q_j}$ や $\dfrac{\partial q_i}{\partial t}$ もやはり $\dot{Q}_*$ は含まない．さらに $\dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \delta_{j,k}$，$\dfrac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = \delta_{j,k}$ であることに留意すれば

$$\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)\cdot \dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right)\cdot \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\cdot\frac{\partial \dot{Q}_j}{\partial \dot{Q}_k}\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}$$

という，点変換ならではの結果が得られる．

6.2 ヤコビ行列を使った表現

点変換において，時間変数があらわに表に出てこない場合を考えると，

$$dQ_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\,dq_j\ ,\quad dq_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\,dQ_j$$

であり，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} dQ_1 \\ dQ_2 \\ \vdots \\ dQ_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{pmatrix} =: \mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*) \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{pmatrix}\ ,$$

$$\begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_n} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dQ_1 \\ dQ_2 \\ \vdots \\ dQ_n \end{pmatrix} =: \mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*) \begin{pmatrix} dQ_1 \\ dQ_2 \\ \vdots \\ dQ_n \end{pmatrix}$$

とあらわされる．この行列 $\mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*)$, $\mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*)$，つまり多変数関数おのおのの全微分の関係を示す行列を，ヤコビ行列と呼ぶ．

偏微分の chain rule から，$F(Q_1,\ldots,Q_n)$ という形式の任意の関数に対して

$$\frac{\partial F(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)}{\partial q_i} = \frac{\partial F(Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \frac{\partial F(Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial Q_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial F(Q_1,\ldots,Q_n)}{\partial Q_n)}\frac{\partial Q_n}{\partial q_i}$$

であるから，

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial Q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial Q_2} + \cdots + \frac{\partial Q_n}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial Q_n} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial Q_j} \tag{6.2}$$

というように演算子部分が取り出せる．行列表現すれば，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_n} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_n} \end{pmatrix}$$

であり，この行列はヤコビ行列の転置行列になっている．すなわち

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q_n} \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*))^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_n} \end{pmatrix}$$

である．この対称性は興味深い[*5]．同様にして

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} = \frac{\partial q_1}{\partial Q_i}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial Q_i}\frac{\partial}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial Q_i}\frac{\partial}{\partial q_m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\frac{\partial}{\partial q_j}$$

から

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_n} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q_n} \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*))^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

これらの関係は，点変換における逆変換の関係にあるから，当然

$$\mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*) \cdot \mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*) = 1$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_n} \\ \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_n} \end{pmatrix} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \delta_{j,k}$$

[*5] これが双対空間とその基底の理論と結びついてくる．この話はまた別途どこかでまとめたい．

であり

$$(\mathsf{J}(\mathsf{u_n}/\mathsf{x_n}))^T \cdot (\mathsf{J}(\mathsf{x_n}/\mathsf{u_n}))^T = 1$$

から

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \frac{\partial q_2}{\partial Q_n} & \cdots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} \end{pmatrix} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} = \delta_{j,k}$$

という結果が得られる．

このヤコビ行列を用いて 6.1 節の結果をあらわすと

$$\begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(q_*(t),t) \\ Q_2(q_*(t),t) \\ \vdots \\ Q_n(q_*(t),t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} dQ_1 \\ dQ_2 \\ \vdots \\ dQ_n \end{pmatrix} = \mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*) \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial t} \end{pmatrix} dt, \quad \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \end{pmatrix} = \mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

同様にして

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(Q_*(t),t) \\ q_2(Q_*(t),t) \\ \vdots \\ q_n(Q_*(t),t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{pmatrix} = \mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*) \begin{pmatrix} dQ_1 \\ dQ_2 \\ \vdots \\ dQ_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial t} \end{pmatrix} dt, \quad \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} = \mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*) \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial t} \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

6.3　オイラー・ラグランジュ方程式の共変性

配位空間でのラグランジアン $L(q_*, \dot{q}_*, t)$ を考え，点変換においてオイラー・ラグランジュ方程式がどのように変換されるかを見ていこう．

ラグランジアンの変換は

$$L(q_*, \dot{q}_*, t) \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t) = L(q_*, \dot{q}_*, t) = L(q_*(Q_* t), \dot{q}_*(Q_*, t), t)$$

とあらわされる．したがって，そもそものオイラー・ラグランジュ方程式 $(EL[L])_i$ は

$$(EL[L])_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_*, \dot{q}_*, t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(q_*, \dot{q}_*, t)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial q_i}$$

とあらわすことができる．偏微分の chain rule を用いれば

$$\frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \dot{q}_i}$$

であり，点変換の性質から Q_k は $\dot{q}_i$ を含まないし，t も $\dot{q}_i$ を含まない．それゆえ

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

となり，さらに点変換の性質 (6.1) (p.46) から

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \, .$$

これより

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial \dot{q}_i}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right)\cdot\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial q_i}\right\} .$$

結果，オイラー・ラグランジュ方程式 $(EL[L])_i$ は

$$\begin{aligned}
(EL[L])_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}(Q_*, \dot{Q}_*, t)}{\partial q_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right)\cdot\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right)\right\} - \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial q_i}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\right)\right\} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial q_i}\right)\cdot\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right\}
\end{aligned}$$

$\dot{Q}_k$ は座標と時間のみの関数の時間による完全導関数であるから，ラグランジアンのゲージ変換のところ（2.4 節 (p.10)）で見たようにオイラー・ラグランジュ方程式を満たすので第 2 項は 0[*6]．ゆえに

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\right)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}(EL[\widetilde{L}])_k
\end{aligned}$$

となっていることがわかる[*7]．これは (6.2) (p.46) と同じ変換である．すなわち，偏微分演算子の変換と共変なのである．

行列表現でまとめると，偏微分演算子の変換則は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q_n} \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*))^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_n} \end{pmatrix}$$

であり，オイラー・ラグランジュ方程式の変換も

$$\begin{pmatrix} (EL[L])_1 \\ (EL[L])_2 \\ \vdots \\ (EL[L])_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \dfrac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \cdots & \dfrac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (EL[\widetilde{L}])_1 \\ (EL[\widetilde{L}])_2 \\ \vdots \\ (EL[\widetilde{L}])_n \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{Q}_*/\mathsf{q}_*))^T \begin{pmatrix} (EL[\widetilde{L}])_1 \\ (EL[\widetilde{L}])_2 \\ \vdots \\ (EL[\widetilde{L}])_n \end{pmatrix}$$

---

*6 第 2 項が 0 になることの別解．$\dot{q}$ と q は独立であるから $\dfrac{\partial \dot{q}}{\partial q} = 0$ となることを利用すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial Q_k}{\partial t}\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial t} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l + \frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_i}\right\} + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial t}\ . \end{aligned}$$

一方，点変換の性質 $\dfrac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial Q_k}{\partial q_i}$ と微分と偏微分の順序を交換することにより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{dQ_k}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial Q_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial Q_k}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_1}\right)\cdot\dot{q}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_2}\right)\cdot\dot{q}_2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_n}\right)\cdot\dot{q}_n + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial t} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial q_l}\right)\cdot\dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial Q_k}{\partial t} \end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{\partial \dot{Q}_k}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \dot{Q}_k}{\partial \dot{q}_i}\right)$ となる．これを用いて第 2 項は 0 である，ということもできる．

*7 記法を整理しておくと

$$(EL[\widetilde{L}])_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_k}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_k}\ , \quad (EL[L])_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\ .$$

となっている．逆変数変換（つまり逆行列）を用いれば

$$
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial Q_n} \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*))^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial q_n} \end{pmatrix} ,
$$

$$
\begin{pmatrix} (EL[\widetilde{L}])_1 \\ (EL[\widetilde{L}])_2 \\ \vdots \\ (EL[\widetilde{L}])_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_1} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \dfrac{\partial q_2}{\partial Q_2} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \dfrac{\partial q_1}{\partial Q_n} & \cdots & \dfrac{\partial q_n}{\partial Q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (EL[L])_1 \\ (EL[L])_2 \\ \vdots \\ (EL[L])_n \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*))^T \begin{pmatrix} (EL[L])_1 \\ (EL[L])_2 \\ \vdots \\ (EL[L])_n \end{pmatrix} .
$$

さて，そもそも $(EL[L])_i = 0$ であったのだから，上の結果より $(EL[\widetilde{L}])_i = 0$ となるのもあきらか．つまり点変換においてオイラー・ラグランジュ方程式は共変であり，かつまた，形式が変わらない，ということが結論できるのである．

この形式の不変性[*8]は，次のように演算子化して見るとわかりやすいかもしれない：

$$
\Omega_i(q, \dot{q}) := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
(EL[L])_i &= \Omega_i(q, \dot{q})L \, , \\
(EL[\widetilde{L}])_i &= \Omega_i(Q, \dot{Q})\widetilde{L}
\end{aligned}
$$

であって，

$$
\begin{pmatrix} \Omega_1(Q, \dot{Q})\widetilde{L} \\ \Omega_2(Q, \dot{Q})\widetilde{L} \\ \vdots \\ \Omega_n(Q, \dot{Q})\widetilde{L} \end{pmatrix} = (\mathsf{J}(\mathsf{q}_*/\mathsf{Q}_*))^T \begin{pmatrix} \Omega_1(q, \dot{q})L \\ \Omega_2(q, \dot{q})L \\ \vdots \\ \Omega_n(q, \dot{q})L \end{pmatrix} .
$$

6.3.1　回転座標系

２次元の直交座標系を $s(x, y)$，角速度 ω で回転している座標系（回転座標系）を $s(u, v)$ としよう．各々の座標変数は

$$
\begin{aligned}
u &= u(x, y, t) = x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t), \\
v &= v(x, y, t) = -x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

という関係にある．逆変換は次の通り：

$$
\begin{aligned}
x &= x(u, v, t) = u\cos(\omega t) - v\sin(\omega t), \\
y &= y(u, v, t) = u\sin(\omega t) + v\cos(\omega t) \, .
\end{aligned}
$$

[*8] 推敲している時，「普遍性」という言葉でもいいのではないかと思った．

これより

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= \dot{x}\cos(\omega t) - x\omega\sin(\omega t) + \dot{y}\sin(\omega t) + y\omega\cos(\omega t) \\
&= \dot{x}\cos(\omega t) + \dot{y}\sin(\omega t) + \omega(-x\sin(\omega t) + y\cos(\omega t)) \\
&= \dot{x}\cos(\omega t) + \dot{y}\sin(\omega t) + \omega v \qquad (6.3)\\
\dot{v} &= -\dot{x}\sin(\omega t) - x\omega\cos(\omega t) + \dot{y}\cos(\omega t) - y\omega\sin(\omega t) \\
&= -\dot{x}\sin(\omega t) + \dot{y}\cos(\omega t) - \omega(x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t)) \\
&= -\dot{x}\sin(\omega t) + \dot{y}\cos(\omega t) - \omega u \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

が得られる．

この変数変換のもとでの質量 m の質点のラグランジアンの変換は，運動エネルギーを T，ポテンシャルエネルギーを U として

$$
L(x,y,\dot{x},\dot{y},t) = T(\dot{x},\dot{y}) - U(x,y) \quad\longmapsto\quad \widetilde{L}(u,v,\dot{u},\dot{v},t) = \widetilde{T}(\dot{u},\dot{v}) - \widetilde{U}(u,v)
$$

であたえられる．T の変換は

$$
\widetilde{T}(\dot{u},\dot{v}) = T(\dot{x},\dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}\left\{\dot{u}^2+\dot{v}^2-2\omega(\dot{u}v-u\dot{v})+\omega^2(u^2+v^2)\right\}
$$

となるから[*9]，変換されたラグランジアンの具体的な形は

$$
\widetilde{L}(u,v,,\dot{u},\dot{v},t) = \frac{m}{2}\left\{\dot{u}^2+\dot{v}^2-2\omega(\dot{u}v-u\dot{v})+\omega^2(u^2+v^2)\right\} - \widetilde{U}(u,v)
$$

となり，オイラー・ラグランジュ方程式は共変であり，かつ，形式が変わらないので

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{u}}\right) - \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial u} = 0\,, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{v}}\right) - \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial v} = 0
$$

と定められる．実際に計算を行うと

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{u}}\right) - \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial u} &= \frac{d}{dt}(m\dot{u}-m\omega v) - m\omega\dot{v} - m\omega^2 u + \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial u} = m\ddot{u} - 2m\omega\dot{v} - m\omega^2 u + \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial u}\,,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{v}}\right) - \frac{\partial\widetilde{L}}{\partial v} &= \frac{d}{dt}(m\dot{v}+m\omega u) + m\omega\dot{u} - m\omega^2 v + \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial v} = m\ddot{v} + 2m\omega\dot{u} - m\omega^2 v + \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial v}
\end{aligned}
$$

と導出できるので，結果

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u} &= -\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial u} + 2m\omega\dot{v} + m\omega^2 u\,,\\
m\ddot{v} &= -\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial v} - 2m\omega\dot{u} + m\omega^2 v
\end{aligned}
$$

となる．右辺の第 2 項はコリオリ力と言われる．第 3 項は遠心力であり，それぞれ慣性力である．

[*9] 地道に $\dot{x}^2+\dot{y}^2$ を計算するのが正攻法であるが，三角関数が登場してくるとそれなりのテクニックもある．(6.3) (p.52) ，(6.4) (p.52) から

$$
\begin{aligned}
\dot{u} - \omega v &= \dot{x}\cos(\omega t) + \dot{y}\sin(\omega t)\\
\dot{v} + \omega u &= -\dot{x}\sin(\omega t) + \dot{y}\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

であり，各々を両辺 2 乗すると

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^2 - 2\omega\dot{u}v + \omega^2 v^2 &= \dot{x}^2\cos^2(\omega t) + 2\dot{x}\dot{y}\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \dot{y}^2\sin^2(\omega t)\\
\dot{v}^2 + 2\omega u\dot{v} + \omega^2 u^2 &= \dot{x}^2\sin^2(\omega t) - 2\dot{x}\dot{y}\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \dot{y}^2\cos^2(\omega t)
\end{aligned}
$$

であり，片々加えると

$$
\dot{u}^2+\dot{v}^2-2\omega(\dot{u}v-u\dot{v})+\omega^2(u^2+v^2) = \dot{x}^2+\dot{y}^2\,.
$$

6.3.2　等加速度座標系

静止している $s(x)$ 系に対して等加速度 a でで移動している座標系を $S(X)$ 系として，それらの関係を見てみよう．

座標変換を示す変数変換は，$t=0$ での $S(X)$ の速度を v_0 として

$$\begin{aligned} x &= x(X,t) = X + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \ , \\ X &= X(x,t) = x - \frac{1}{2}at^2 - v_0 t \end{aligned} \tag{6.5}$$

であたえられ[*10]，変数変換のもとでのラグランジアンの変換は

$$L(x,\dot{x},t) = T - U \quad \longmapsto \quad \widetilde{L}(X,\dot{X},t) = \widetilde{T} - \widetilde{U}$$

である．

質量 m の質点の運動を考えよう．$s(x)$ 系では

$$L(x,\dot{x},t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U$$

であり，(6.5) (p.53)　から $\dot{x} = \dot{X} + at + v_0$ であるから

$$\widetilde{T} = \frac{1}{2}m(\dot{X} + at + v_0)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + 2(at+v_0)\dot{X} + a^2t^2 + 2av_0t + v_0^2)$$

したがって，変換されたラグランジアン $\widetilde{L}$ は

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + 2(at+v_0)\dot{X} + a^2t^2 + 2av_0t + v_0^2) - \widetilde{U}(X)$$

となる．各々のラグランジアンに対するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial U}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \ , \tag{6.6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{X}}\right) - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial X} = \frac{d}{dt}(m\dot{X} + m(at+v_0)) + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial X} = m\ddot{X} + ma + \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial X} = 0 \tag{6.7}$$

ポテンシャル関数として，位置に比例する $U(x) = mgx$ というものを考えよう（さしあたり g は定数）．この時

$$\widetilde{U}(X) = U(x) = U\left(X + \frac{1}{2}at^2 + v_0t\right) = mg\left(X + \frac{1}{2}at^2 + v_0t\right)$$

と変換されるけれども，ラグランジアンにあらわれる偏微分は

$$\frac{\partial U}{\partial x} = mg \ , \quad \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial X} = mg$$

[*10] 加速度 a で移動する点を $p = p(t)$ とすると

$$\frac{d^2p(t)}{dt^2} = a \quad \therefore \ \frac{dp(t)}{dt} = \int a\,dt = at + C \quad \therefore \ p(t) = \int (at+C)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + Ct + C'$$

となる．初期条件として $p(0)=0$ をあたえても一般性は失われない．さらに，$\left.\frac{dp(t)}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ であるとしておこう．この初期条件から $C = v_0$, $C' = 0$ が得られ，結果 $p(t) = (1/2)at^2 + v_0t$ となる．つまり，時間 t の間に点 p は $(1/2)at^2 + v_0t$ 移動するのである（a には正負両方の意味が込められていることに留意）．本文にある x と X においては，座標系の移動であるから，$S(X)$ の原点が時間 t で $(1/2)at^2 + v_0t$ 移動していると喝破すれば　(6.5) (p.53)　が得られる．

となって変わらない．したがってオイラーラグランジュ方程式は

$$(6.6)(p.53) \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{x} = -mg \,, \tag{6.8}$$

$$(6.7)(p.53) \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{X} = -mg - ma \,. \tag{6.9}$$

g を重力加速度と考えると，(6.8) (p.54) は重力場での自由落下の運動方程式そのものである．(6.9) (p.54) は，$S(X)$ が非慣性系であることから生じる慣性力 ma が存在していることを示している．$a > 0$ （例えばロケットの打ち上げ）の時には，$-x$ 方向に力 ma を感じる．$a < 0$ の時は，$-mg - ma > -mg$ だから感じる力は小さくなる．そしてちょうど $-a = g$ の時には $m\ddot{X} = 0$ となる．これは重力加速度と同じ大きさで $-x$ 方向に等加速度運動している座標系つまり g で自由落下している座標系では，全く力を感じないということをあらわしている．重力場が存在しない自由空間と同等の世界になっていることを示しているのである．

> 6.3.1 節や 6.3.2 節で述べてきた事柄に関して，山本・中村の解析力学の教科書 [6] の p.109 の説明を引用しておく：
>
> このようにニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ を回転座標系で表せば，慣性力を付け加えなければならない．つまりニュートンの運動方程式は時間を含む座標変換や加速度系（非慣性系）への変換では一般に形を変える．しかしラグランジュ方程式 $\mathcal{E}_i[L] = 0$ は，このような広い変換に対しても共変的であり，任意に動く座標系に移っても形を変えずに成り立つのである．これはニュートンの運動方程式との決定的な違いである．

付録 A　3 次元直交座標のベクトル解析のメモ

A.1　ベクトルの記法

ベクトルを $\boldsymbol{v}$ のように太字であらわすことにしよう．その上で，3 次元直交座標の各軸の単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ とあらわすことにする．この単位ベクトルを用いれば，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{x}} v_x + \hat{\boldsymbol{y}} v_y + \hat{\boldsymbol{z}} v_z$$

とあらわすことができる．この 3 個の数 v_x, v_y, v_z それぞれを x 軸方向の成分，y 軸方向の成分，z 軸方向の成分という．ベクトルは，この成分に注目して

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

と表記されることもしばしばある．さらにまた行列表現を利用して，

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} \\ \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix}$$

とあらわされることもある[*1]．

3 次元直交座標空間の点 (x, y, z) は，ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}} x + \hat{\boldsymbol{y}} y + \hat{\boldsymbol{z}} z$$

とあらわすことができる．このベクトル $\boldsymbol{r}$ を**位置ベクトル**と呼ぶ．

A.2　ベクトルの内積と外積

ベクトルの内積を，成分どうしの積の和，と定義することにしよう．すなわち $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

である．内積についてはここでは間に「·」を用いて表記することにする．そしてこの定義から内積については交換関係 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ が成り立つことはあきらかである．

この定義から，単位ベクトルどうしの内積の性質が導き出される．各単位ベクトルは

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}} &= \hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} 0 + \hat{\boldsymbol{z}} 0 , \\ \hat{\boldsymbol{y}} &= \hat{\boldsymbol{x}} 0 + \hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}} 0 , \\ \hat{\boldsymbol{z}} &= \hat{\boldsymbol{x}} 0 + \hat{\boldsymbol{y}} 0 + \hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

とあらわしうるから，あきらかに

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} &= \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = 0 , \\ \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} &= \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 1 \end{aligned}$$

[*1] 掛け算において $\hat{\boldsymbol{x}} v_x = v_x \hat{\boldsymbol{x}}$ であることを鑑みれば，成分と基底ベクトルのどちらを行ベクトル，どちらを列ベクトルとしても問題はないことはあきらかである．

である．この結果を，単位ベクトルは（内積において）互いに直交している，などという[*2]．

ベクトルの外積を，ここでは，以下のように行列式を用いて定義しよう：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}&=\hat{\boldsymbol{x}}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}+\hat{\boldsymbol{y}}\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}+\hat{\boldsymbol{z}}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\\ &=\hat{\boldsymbol{x}}(a_yb_z-a_zb_y)+\hat{\boldsymbol{y}}(a_zb_x-a_xb_z)+\hat{\boldsymbol{z}}(a_xb_y-a_yb_x)\ .\end{aligned}$$

この定義から $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ であることは簡単に導出できる．

おなじみの x-y 平面上での 2 次元ベクトルの外積は，$a_z=0,\ b_z=0$ の場合と考えて良いから

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ a_x & a_y & 0\\ b_x & b_y & 0\end{vmatrix}=\hat{\boldsymbol{x}}\begin{vmatrix}a_y & 0\\ b_y & 0\end{vmatrix}+\hat{\boldsymbol{y}}\begin{vmatrix}0 & a_x\\ 0 & b_x\end{vmatrix}+\hat{\boldsymbol{z}}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\hat{\boldsymbol{z}}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\hat{\boldsymbol{z}}(a_xb_y-a_yb_x)$$

となり，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向のみになる．

単位ベクトル間では次のようになる：

$$\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}\ ,\quad \hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{x}}\ ,\quad \hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}\ .$$

A.3　ナブラ演算子

ベクトル演算子ナブラ（$\boldsymbol{\nabla}$）[*3]と，スカラー演算子であるラプラス演算子（ラプラシアン $\triangle$）は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}&:=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\ ,\\ \triangle:=\boldsymbol{\nabla}^2&:=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

と定義される．$\boldsymbol{\nabla}$ はベクトルであることと，通常は直交座標を基本として定義されることに留意，である．

ベクトル解析においては，このナブラを用いるのが断然便利である（と思う）が，しばしば「ベクトル解析単語」も用いられる．その「ベクトル解析単語」とナブラは次のように結びついている[*4]（f を任意のスカラー，$\boldsymbol{A}$ を任意のベクトルとする）：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}f=\mathrm{grad}\ f=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\\ &\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\ ,\\ &\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}=\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z)\\ &\qquad=\hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\ ,\\ &\triangle\ f=\boldsymbol{\nabla}^2f=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ .\end{aligned}$$

[*2] そして，正規直交基底を用いた抽象ベクトル空間の理論へ一般化されていくのである．
[*3] デル演算子，デルオペレータと言われることもある．
[*4] rot を curl と書く流儀もあるようだ．

スカラー演算子ラプラシアンが，$\triangle\boldsymbol{A}$ のようにベクトルに作用するかのように記述されることがあるが，これはひとつの簡略表現であって，その実体は

$$\triangle\boldsymbol{A} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \triangle A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \triangle A_y = \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \triangle A_z = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

である．この事実はその他のスカラー演算子（$\Box$ や $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ ）についても同様である．

A.4　各種公式

f, g を任意のスカラー，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を任意のベクトルとする．まず線型性である（ベクトルを相手にしているので，ある意味自明の事柄ではあると思う）．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}(f+g) = \boldsymbol{\nabla}f + \boldsymbol{\nabla}g && \left\{\mathrm{grad}\ (f+g) = \mathrm{grad}\ f + \mathrm{grad}\ g\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} && \left\{\mathrm{div}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{B}\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} && \left\{\mathrm{rot}\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}\right\} \\
&\triangle\,(f+g) = \triangle f + \triangle g
\end{aligned}$$

次に，種々の公式である．これら全てを覚える必要はないと思うし，そもそも覚えきれまい．ざっとした印象を持っておいて，ある式を評価・操作する際に，この公式一覧を見ながら適用できればいいと割り切る．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}f = \triangle f && \left\{\mathrm{div\ grad}\ f = \triangle f\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}f = 0 && \left\{\mathrm{rot\ grad}\ f = 0\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0 && \left\{\mathrm{div\ rot}\ \boldsymbol{A} = 0\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A} && \left\{\mathrm{rot\ rot}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}(fg) = (\boldsymbol{\nabla}f)g + f(\boldsymbol{\nabla}g) && \left\{\mathrm{grad}\ (fg) = (\mathrm{grad}\ f)g + f(\mathrm{grad}\ g)\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{A} + f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) && \left\{\mathrm{div}\ (f\boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\ f)\cdot\boldsymbol{A} + f(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A})\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla}f)\times\boldsymbol{A} + f(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) && \left\{\mathrm{rot}\ (f\boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}\ f)\times\boldsymbol{A} + f(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) \\
&\qquad\left\{\mathrm{grad}\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\ )\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{grad}\ )\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) \\
&\qquad\left\{\mathrm{div}\ (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}\cdot(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B})\right\} \\
&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} \\
&\qquad\left\{\mathrm{rot}\ (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{grad}\ )\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad}\ )\boldsymbol{B}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\triangle\,(fg) = (\triangle f)g + f(\triangle g) + 2(\boldsymbol{\nabla}f)(\boldsymbol{\nabla}g) \\
&\qquad\left\{\triangle(fg) = (\triangle f)g + f(\triangle g) + 2(\mathrm{grad}\ f)(\mathrm{grad}\ g)\right\}
\end{aligned}$$

A.5　ポテンシャルが存在するための条件

ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ $(\boldsymbol{A} = -\mathrm{grad}\ \phi)$ というスカラー ϕ が存在するとき，ϕ を $\boldsymbol{A}$ に対するスカラーポテンシャルという．この ϕ が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0$ $\quad$ $(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = 0)$ である．すなわち

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\phi \quad \text{を満たす}\ \phi\ \text{が存在する．}$$

また $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V}$ $(\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{V})$ というベクトル $\boldsymbol{V}$ が存在するとき，$\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{A}$ に対するベクトルポテンシャルという．この $\boldsymbol{V}$ が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ $\quad$ $(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = 0)$ である．つまり

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} \quad \text{となる}\ \boldsymbol{V}\ \text{が存在する．}$$

この 2 つの数学的事実は，「ポアンカレの補題」をベクトル解析に適用した結果から導かれるものであるらしい．

A.6　場の記述

場（field）とは，空間上の各点が，スカラー値やベクトルを持っているものと了解する考え方である．各点がスカラー値を持っている場合をスカラー場，ベクトルを持っている場合をベクトル場と呼ぶ．

空間上の点の位置を $\boldsymbol{r}$，時刻を t であらわすと，スカラー場 f，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} f &= f(\boldsymbol{r}, t)\ , \\ \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) \end{aligned}$$

とあらわされる．ベクトル場の表記は，いわゆる簡便表現であり，分解すると

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_x = F_x(\boldsymbol{r}, t) \\ F_y = F_y(\boldsymbol{r}, t) \\ F_z = F_z(\boldsymbol{r}, t) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F_x = F_x(x, y, z, t) \\ F_y = F_y(x, y, z, t) \\ F_z = F_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

ということである．

付録 B　偏微分コメンタール

偏微分の定義は所与のものとして，その操作についてのコメントを記す．

B.1　偏微分と微分の形式的類似性，非類似性

変数 x, y, t が完全に独立な場合から始める．関数 $f(x, y, t)$ の全微分は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

であたえられる．また変数の独立性から $dy/dx = 0$, $dx/dt = 0$ などであるから，上の全微分の式より，形式的に

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}\,, \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

が成り立つ．

上記の偏導関数は一般に x, y, t を変数に持つ[*1]．したがって，例えば $\partial f/\partial x$ の全微分をとると，

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\}dx + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\}dy + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\}dt$$

であり，全く同じ理路で

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

となる．これで見るように，変数がおのおの完全に独立である場合には，ことは単純である．

次に，変数が $x(t)$, $y(t)$, t である場合を考えよう[*2]．関数 $f(x(t), y(t), t)$ の全微分はやはり同様にあらわすことができて，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$$

となるけれども，$x = x(t)$, $y = y(t)$ であることを考慮すれば，

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

となって，

$$\frac{df}{dt} \neq \frac{\partial f}{\partial t}$$

になる．

[*1] 例えば，$f(x, y, t) = (xyt)^2$ の時，$\partial f/\partial x = 2x(yt)^2$ である．x で偏微分したからと言って，必ず x だけの関数になるわけではない．$f(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2$ の時は，$\partial f/\partial x = 2x$ であるが，これは特殊な場合であるとみなせば良い．

[*2] この変数の形式は，t が時間，$x(t)$, $y(t)$ が運動あらわすと解釈すれば，物理でおなじみのものである．

偏導関数の偏導関数は，一見したところややこしく見えるので，確認の意味も込めて記しておく．$\partial f/\partial x$ の全微分をとると，

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dx + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dy + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} dt$$

であるから，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} \frac{dx}{dt} + \left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

となる．

ここまでの事柄をより多くの変数にまで拡張しておこう．$f(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t), t)$ を考えると，

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

であるから

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \ .$$

さらに，

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) &= \left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_1 + \left\{\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_2 + \cdots + \left\{\frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_n + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dq_i + \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} dt \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\right) \ .$$

B.2　偏微分の chain rule

B.2.1　全微分の同値性

□ 1 変数関数の場合

まず最初に，$f(u)$, $u = u(x)$ という合成関数を考える．このとき $df = (df/du)\, du$ であり，かつ，$du = (du/dx)\, dx$ であるから，

$$df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} dx$$

となる．これは合成関数の chain rule そのものを示したものである．ここで合成関数というものに少し立ち入って見ると，ここで考えた関数 f は，最終的には x のみを変数と持つ関数であると捉えることができる．それが変数変換 $u = u(x)$ をほどこされて f を形作っている．変数変換を伴っているから，最終的に x の関数と見立てた場合には，f の関数形は普通は異なっているだろう．関数形が異なれば，微分演算も異なるのではと想像される．

今，x を変数とした場合の f の関数形を，$\overline{f}$ であらわすことにすると，f と $\overline{f}$ の関係は，

$$\overline{f}(x) = f(u)$$

ということになる．ここで，

変数変換で結ばれている 2 つの関数が等しい時には，各々の関数の全微分は等しい

ということを認めてしまうことにする[*3]．その結果，$d\overline{f} = df$ となる．一方，

$$d\overline{f} = \frac{d\overline{f}}{dx}\,dx\ , \quad df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}\,dx$$

であるから，

$$d\overline{f} = df \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\overline{f}}{dx}\,dx = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}\,dx \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\overline{f}}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}\ .$$

この結果は，f を最終的に x の関数と見立てた際の導関数（すなわち，$\overline{f}$ の導関数）と，合成関数の chain rule から求めた導関数は等しい，ということだと解釈できる．この事実のもとで，一般に，

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \qquad (\text{ただし，}u = u(x))$$

と書かれるのである[*4]．

□ 多変数関数の場合

多変数関数の場合も，やはり，変数変換で結びついている場合は，全微分は等しいと考える．2 変数関数 $F(u_1, u_2)$，$u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ で考えると，各々の全微分は，

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}du_2\ , \qquad \begin{cases} du_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 \\ du_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 \end{cases}$$

であるから

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_2\ .$$

一方，F は最終的には，x_1，x_2 の関数であるから，その関数形を $\overline{F}$ (i.e. $\overline{F} = \overline{F}(x_1, x_2)$) とすると，

$$d\overline{F} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_2}dx_2$$

であり，この両者の全微分は等しいことを認めたので，

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\ , \qquad \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

となり，この事実のもとで，一般的には

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\ , \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

とあらわされる．

[*3] この事実は，一見当たり前のように思えるのだけれど，きちんとまともにやろうとすると，大掛かりな仕掛けが必要なのではないかと想像している．そうでもないのだろうか？

[*4] でもまぁ，df の全微分の両辺を dx で割る，つまり

$$df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

だけでも良さそうな気がしてきた．ここまで大仰なことを考えなくても良かったのかもしれない．

B.2.2　偏微分の chain rule

準備はほぼ終わっていて，上で用いた $F(u_1, u_2)$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ の場合を再確認すると

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_2 \,,$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \,, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

である．これが典型的な chain rule．より一般的な場合として，$F(u_1, \ldots, u_n)$, $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_m)$ のときには,

$$dF = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,dx_i\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \,.$$

少し毛色の変わった $F(u)$, $u = u(x_1, x_2)$ という場合には,

$$dF = \frac{dF}{du}\,du = \frac{dF}{du}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_2\right\} = \left(\frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx_2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_1} \,, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x_2} \,.$$

なお，この dF/du は往往にして，$\partial F/\partial u$ と書かれることもある．他に独立な変数がないので，d でも ∂ でも実際の計算結果に差がない，というのがその理由なのかもしれない.

B.3　微分，偏微分の演算子化

合成関数 $F(u)$, $u = u(x)$ を考える．各々の全微分は，$dF = (dF/du)\,du$, $du = (du/dx)\,dx$ であるから，まとめると $dF = (dF/du)(du/dx)\,dx$ となる．これを演算子化する．任意の関数 $F(u)$ について成り立つことから，最終的に F を省く操作を行うのである（演算子化）．道筋は次の通り：

$$\left\{dF = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx}\,dx \iff \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} \iff \frac{dF}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dF}{du}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{d}{du} \,.$$

２変数関数 $F(u_1, u_2)$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ を考えて，上の微分演算子の変換と同様に，偏微分演算子の変換を考えてみる．理路はほとんど同じである．各々の全微分は,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2}du_2 \,, \qquad \begin{cases} du_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2 \\[2ex] du_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2 \end{cases}$$

であるから

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)dx_2 \,.$$

一方，F は最終的には，x_1, x_2 の関数であり，関数形は違うかもしれないが全微分は等しいという事柄から，$F = F(x_1, x_2)$ として操作しても問題はないことを前に見た．それゆえ,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2$$

となってしたがって,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,,\quad \frac{\partial F}{\partial x_2}=\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\,.$$

これを演算子化すれば,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial u_2}\,,\quad \frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\,.$$

n 変数関数($F(u_1,\dots,u_n)\,,u_i=u_i(x_1,\dots,x_n)$)への拡張は容易いので,結果だけを記す:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_k}\,.$$

B.4 高階偏微分の特徴

B.4.1 偏微分の順序交換

一般には,偏微分は順序交換できるとは限らないが,

関数 $f(x,y)$ において $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ が存在し,かつこれらが連続関数であるとき,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

が成立する.

ということは言える.この件については,「逆」は成り立たない(等しくても,連続関数であるとは限らないから).そして,偏微分が可換となる十分条件は他にも色々あるようだけれど,実用上はこれが一番有用であろう.ほとんどの普通の関数はこの十分条件,すなわち「存在して連続関数であること」を満たすからである.

実際に計算を行ってみると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}&=\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{\partial f(x+\Delta x,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\}\\&=\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)\right)-\lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left(f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right)\right\}\\&=\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)\right\}\end{aligned}$$

であり,同様にして

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}&=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\frac{\partial f(x,y+\Delta y)}{\partial x}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\}\\&=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)\right)-\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\right)\right\}\\&=\lim_{\Delta y\downarrow 0}\frac{1}{\Delta y}\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y)\right\}\end{aligned}$$

となる.この計算においては偏導関数の存在はすでに前提とされているので,この 2 つの極限 $\lim_{\Delta x\downarrow 0}$ と $\lim_{\Delta y\downarrow 0}$ との順序が交換できれば

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

となる.そしてこの順序交換ができるということは連続関数であるということを意味している.したがって,上の十分条件が満たされていることになり,その時にはこの計算のように,偏微分の順序を交換しても等しい,と結論づけられるのである.

B.4.2　演算子法のさわり

ここでは実用上必要になることが多いほんのさわりのみについて述べる．演算子法が成立する背景とその理論については教科書にあたるべきである．

□ 記法の約束

関数 f に対して x で 2 回偏微分する，という操作は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

と書くのが由緒が正しい．そしてこれらは，場面に応じて次のようにもかかれる：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f\ .$$

さらにこれから偏微分演算子のみを取り出して，次のようにも書く：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\ .$$

同様にして，x で偏微分し，その後に y で偏微分するという操作も

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f$$

とあわせて，演算子のみの形にすれば

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

となる．

□ 代数化

上のような流儀で偏微分の演算子を用いることにより，高階偏微分について，代数的な演算を利用することができるようになる．例えば何らかの計算によって

$$\frac{\partial}{\partial x}=\alpha\frac{\partial}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial}{\partial \eta}\quad（\alpha,\beta\ \text{は定数}）$$

と求まったとすると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2&=\alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2+2\alpha\beta\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)+\beta^2\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2\\&=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}+\beta^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

というような計算が可能になり，高階偏微分 $\partial^2/\partial x^2$ を求めることができるのである．この代数化による変形は，重宝されるものである．

エピローグ

昔，関数の表記と変数について，思うところを以下のようにメモした事がある．

> 慣れ親しんだ $f(x)=x^2$ という関数から始めよう．この関数は，働きとしては「ものを自乗する」というものであり，形としては x^2 というものである，と捉えて良いだろう．そしてこの x は「変数」と呼ばれる．
>
> ここで，$f(a)$ という文字列を考えてみる．f の定義からこれは，$f(a)=a^2$ であるが，これは関数なのだろうか？それとも $f(x)$ という関数で x に a というものを当てはめた時の結果を示しているものなのだろうか？より具体的に，$f(2)$ を考えてみる．$f(2)=2^2=4$ であることは明らかだが，誰も「２」が変数であるとは考えまい．x が 2 のときの関数の値であると諒解するのが素直である．となると，$f(a)$ も x が a の時の値であると諒解したい，と思う．
>
> しかしながら，関数の変数には必ず x を用いなければならない，というものでもなかろう．我々は x や y などのアルファベット列の終わりの方の文字群を変数と見立てることに慣れてはいるが，それはあくまでもそのような習慣であるというだけで，となれば，変数として a を採用し，その関数を $f(a)=a^2$ としてもなんら問題はないはずである．
>
> $f(a)$ という表記にはこの両義性が常について回る．そして我々は臨機応変にそれを使い分けている，というのが実情である．
>
> 厳密さ（？）を求めて，UNIX のメタキャラクタのように「関数を $f(*)=*^2$ と記し，$f(a)$ や $f(x)$ をこの関数のある特定の値を示す」という風に決める方法もあるだろうが，変数が 2 個以上になると，この方式もうまくいかない．もう一つ別の文字を持ってこなければならない．例えば，$g(*,@)=*^2+\exp(@)$ などのように．そしてこれよりは $g(u,v)=u^2+\exp(v)$ の方がはるかに見通しが良い．というか，そのように教育，訓練，習慣づけされてきて今がある．
>
> なので，通常は，$f(x)$ や $f(a), g(P,Q)$ などと書かれている場合，この x,a,P,Q らは，特別な断りがない限り，変数であるとみなされる．「変数 x がある特定の値 A の時」の関数値を強調したい場合の慣習的な表記は，A が具体的な数 2 であれば $f(2)$ のように表記される．具体的でない場合の表記は定まっておらず，文脈依存で様々な形が取られているのが実情である[*5]．しばし見られる表記としては，$f(x=A)$ がある．代入という操作を意識させるように $f(x\to A)$ や $f(x\leftarrow A)$ という表記も有用であるとわたくしは思う．
>
> さらに，A を特定の値というものに限定するのではなく，別の物を代入する（例えば $F(x)$ を代入する，$G(x)$ に置き換える）操作にまで一般化して $f(x\to F(x))$ や $f(x\leftarrow G(x))$ という表記もありだろうとも思う．

当時から，関数の変数引数の記述方法についてちょっとした「ひっかかり」を引きずっていたようだ．しかしながら，関数形の変化についてはそれほど注意を払っていたわけでもない．ただ最後の文にあるように，「変数に

[*5] 導関数の場合には，$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=A}$ や，関数の変数を省略して $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=A}$ と書かれることが多い．$\dfrac{df}{dx}(A)$ というのもまま見かける．$\dfrac{df(A)}{dx}$ はナンセンスである．

関数を代入する」ということも少しは認識していた．それこそが変数変換の本質なのだろうと，本稿を書き進めていく途中で気が付いた．

執筆中は常に，関数形の不変性や共変性の理解はしんどいなぁ，と感じていた．実情である．そもそも関数というものそれ自体の形式への洞察が足りなかったことが原因なのであろう．$\widetilde{L}(Q) = L(q) = L(\varphi(Q))$ がストンと腑に落ちたのはだいぶ後の事である．変数に関数を代入する，その結果，関数形は一般には変化する，ということの概念がなかなか身体で掴めなかった．

結局初稿を書き上げるまでに，1 年半がかりで 3 回も書き直す羽目になってしまった．

なお，共変性については，反変ベクトルと共変ベクトルを明示的に区別した 4 元ベクトルの体系とテンソルを駆使する「共変形式」($\partial'_\mu F'^{\mu\nu}(x') - j'^\nu(x') = \Lambda^\nu_\lambda(\partial_\rho F^{\rho\lambda}(x) - j^\lambda(x))$ のようなもの）を利用する方が見通しがよくなるのだろうと考えている．けれども，やはりこの形式を「身体で掴む」には本稿のような「基本（というのもおこがましいが)」を一度はくぐっておいた方が良いのではあるまいか，そう思っている．

2018 年の晩秋の東東京にて，筆者．

参考文献

[1] 久島 広幸. 『解析学ノート』. https://www.hisasima.jp/studynote/variational.pdf, 2015/12.

[2] 高瀬 正仁. 『dx と dy の解析学—オイラーに学ぶ』. 日本評論社, 増補版, 2015. (増補版第一刷を参照した).

[3] 高瀬 正仁. 『微分積分学の史的展開—ライプニッツから高木貞治まで』. 講談社, 2015. (第 2 刷を参照した).

[4] 高瀬 正仁. 『微分積分学の誕生—デカルト『幾何学』からオイラー『無限解析序説』まで』. SB クリエイティブ株式会社, 初版, 2015.

[5] 山本 義隆, 中村 孔一. 『解析力学 II』. 朝倉物理学体系 2 (朝倉書店), 初版, 1998. (初版第 3 刷 (2002) を参照した).

[6] 山本 義隆, 中村 孔一. 『解析力学 I』. 朝倉物理学体系 1 (朝倉書店), 初版, 1998. (初版第 3 刷 (2000) を参照した).

[7] 前原 昭二. 『線形代数と特殊相対論』. 日本評論社, 1993. (第 1 版第 1 刷 (1993) を参照した).

[8] 前野 昌弘. 『よくわかる解析力学』. 東京図書株式会社, 2013. (第 2 刷 (2014) を参照した).

[9] 徳永 旻, 岡村 浩. 『現代の古典物理』. 現代書館, 1975. (第 2 版第 15 刷 (1996) を参照した).