$\dfrac{1}{1+y^4}$, $\dfrac{y^2}{1+y^4}$ の積分の実況中継

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2023 年 6 月 29 日

概要

表題の積分は、計算の手間がほんとうに面倒な積分[*1] なので、齢を重ねるとそのやり方もおもいだせなくなりそうなので、備忘録をかねてここに記す．ちなみにこの計算は，Fresnel 積分とよばれるものの導出において $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy^2}\sin(x)\,dx = \frac{1}{1+y^4}$ や $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy^2}\cos(x)\,dx = \frac{y^2}{1+y^4}$ という形であらわれてくるものでもある．

* *

$\displaystyle\int \frac{1}{1+y^4}\,dy$ の計算

□ 方法を考える

$\displaystyle\int \frac{1}{1+y^4}\,dy$ の形を見て，まず最初に浮かんだのは，置換積分で計算がかんたんにならないかというアイデアだった．何を置換するか？ y^4 の次数をさげればとおもって，$Y = y^2$ としてみると

$$2ydy = dY \quad \therefore dy = \frac{1}{2y}dY$$

となる．ここで y をなくしたいとおもい，$Y = y^2$ から $y = \pm\sqrt{Y}$ と計算して，はたとつまずく．平方根がでてくるのが面倒であると思うし，それに，$\pm$ と両方の場合をあつかうのがしんどそうである．さらに，$y = \sqrt{Y}$ の場合だけに限ったとしても，そもそもの積分が

$$\int \frac{1}{1+y^4}\,dy = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+Y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{Y}}\,dY$$

となり，余計面倒な Y の次数があらわれてくる．このやりかたは，ギブアップするしかない．

つぎに浮かんだアイデアは，$1+(\cdot)^2$ であるから，tan が使えるのではないかということだった．そのこころは，$1+tan^2\theta = (1/\cos\theta)^2$ という関係から，足し算がなくせるのではないか，というものだ．$y^2 = \tan\theta$ とし，とりあえず θ の範囲については後で考えることにして，試してみると

$$2ydy = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \quad \therefore\ dy = \frac{1}{2y}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

であり，やはり $y = \pm\sqrt{\tan\theta}$ となって，ややこしさは解消されないことが予想できる．積分は

$$\int \frac{1}{1+y^4}\,dy = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\pm2\sqrt{\tan\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{\pm2\sqrt{\tan\theta}}d\theta$$

[*1] 計算に手間取る程度がこれと似たようなものに，極座標表示のラプラシアンがある．どちらも 3 回以上は計算したくないけれど，少なくとも 1 回はやっておく価値があるだろうとはおもう．とはいえ，こういう面倒なものを計算してみると，「公式集」のありがたみが，よくわかる．

とそれなりに簡単になるが，tan の平方根を積分することになって，ここでも怯む．θ の範囲を考えることと，$\pm$ の場合わけも考慮しなければならないだろうし（上手いやり方はあるのか？）．

つまるところ，上記のような置換方法では，塩梅がわるいのだ．

□ 部分分数への分解

次数をさげたいのだから，因数分解して部分分数にするという方法で攻めてみる．まず

$$1+y^4=(y^2+1)^2-2y^2=(y^2+1+\sqrt{2}y)(y^2+1-\sqrt{2}y)$$

という因数分解ができる．これをつかうと

$$\frac{1}{1+y^4}=\frac{1}{(y^2+1+\sqrt{2}y)(y^2+1-\sqrt{2}y)}$$

であるから，部分分数に分解された形を

$$\frac{1}{1+y^4}=\frac{Ay+B}{y^2+1+\sqrt{2}y}+\frac{Cy+D}{y^2+1-\sqrt{2}y} \tag{1.1}$$

とおいてみる．分子の次数をひとつ下げておくのが部分分数への分解のテクニックである．したがって

$$(Ay+B)(y^2+1-\sqrt{2}y)+(Cy+D)(y^2+1+\sqrt{2}y)=1$$

でなければならないことになる．左辺をひたすら計算すると

$$\begin{aligned}&Ay^3-\sqrt{2}Ay^2+Ay+By^2-\sqrt{2}By+B+Cy^3+\sqrt{2}Cy^2+Cy+Dy^2+\sqrt{2}Dy+D\\&=(A+C)y^3+(-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)y^2+(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)y+B+D\end{aligned}$$

であるから

$$A+C=0\,, \tag{1.2}$$
$$-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \quad \therefore\ \sqrt{2}(C-A)+(B+D)=0\,, \tag{1.3}$$
$$A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \quad \therefore\ \sqrt{2}(D-B)+(A+C)=0\,, \tag{1.4}$$
$$B+D=1\,, \tag{1.5}$$

でなければならない．(1.4) に (1.2) を適用すると $D=B$．これを (1.5) に用いると $B=D=1/2$．そして (1.3) から $\sqrt{2}(C-A)=-1$ で，(1.2) を使えば $2\sqrt{2}C=-1$．ゆえに，$C=-1/2\sqrt{2}$, $A=1/2\sqrt{2}$．几帳面に分母を有理化してまとめると

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4}\,,\quad B=\frac{1}{2}\,,\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{4}\,,\quad D=\frac{1}{2}\,.$$

ともとまる．それゆえ，もとの分数は

$$\frac{1}{1+y^4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}y+\frac{1}{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}+\frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}y+\frac{1}{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}-\frac{y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right\} \tag{1.6}$$

となる．$\{\cdots\}$ の中の各項は，分子の次数が分母の次数より 1 小さい．この事実に着目して，$\int f'/f=\log|f|$ の形式に持ち込めないかと想像してみる．そうすれば積分ができる．

最初の項の変形について，まずあたまに浮かぶものは

$$\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}=\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}-\frac{y}{y^2+1+\sqrt{2}y}=\frac{(y^2+1+\sqrt{2}y)'}{y^2+1+\sqrt{2}y}-\frac{y}{y^2+1+\sqrt{2}y}$$

である．そして上の 2 項目も似たように f'/f を目指して変形していけばよいだろう．しかしこのやりかたは，ほぼ同じことを 2 回やるので，手間だ．次のように工夫すると段階が少なくて済む：

$$\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y+2\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}+\frac{\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}\right\}\,.$$

したがって

$$\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y} = \frac{(y^2+1+\sqrt{2}y)'}{y^2+1+\sqrt{2}y} \ ,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{2}}{\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1} \ .$$

(1.6) の 2 つめの項も

$$\frac{y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y-2\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} - \frac{\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right\}$$

となるから

$$\frac{2y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} = \frac{(y^2+1-\sqrt{2}y)'}{y^2+1-\sqrt{2}y} \ ,$$
$$\frac{\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{2}}{\left(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\left(y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1} \ .$$

いまいちど全体をまとめると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+y^4} &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\frac{y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y} - \frac{y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y} + \frac{\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} - \frac{\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\left(y^2+1+\sqrt{2}y\right)'}{y^2+1+\sqrt{2}y} + \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\right) - \left(\frac{\left(y^2+1-\sqrt{2}y\right)'}{y^2+1-\sqrt{2}y} - \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

したがって，そもそもの積分は（積分定数は途中の計算では端折る）

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{1+y^4}\,dy \\
&= \int \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{\left(y^2+1+\sqrt{2}y\right)'}{y^2+1+\sqrt{2}y} + \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\right) - \left(\frac{\left(y^2+1-\sqrt{2}y\right)'}{y^2+1-\sqrt{2}y} - \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\right)\right\} dy \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\int \frac{\left(y^2+1+\sqrt{2}y\right)'}{y^2+1+\sqrt{2}y}\,dy + \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\,dy - \int \frac{\left(y^2+1-\sqrt{2}y\right)'}{y^2+1-\sqrt{2}y}\,dy + \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\,dy\right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\log\left|y^2+1+\sqrt{2}y\right| + \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\,dy - \log\left|y^2+1-\sqrt{2}y\right| + \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\,dy\right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\log\left|\frac{y^2+1+\sqrt{2}y}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right| + \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\,dy + \int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\,dy\right\} \ .
\end{aligned}$$

残りの積分を計算しよう．これは $\tan^{-1}$ にまつわる積分に帰着する．$s=\sqrt{2}y+1$ とすると $ds=\sqrt{2}dy$ だから結果うまいこと dy が置き換わって

$$\int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\,dy = 2\sqrt{2}\int \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,ds = 2\int \frac{1}{s^2+1}\,ds = 2\tan^{-1}(s) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y+1\right) \ .$$

同じようにして，$t=\sqrt{2}y-1$ とすれば $dt=\sqrt{2}dy$ なので

$$\int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\,dy = 2\sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\tan^{-1}(t) = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y-1\right) \ .$$

最終的に

$$\int \frac{1}{1+y^4}\,dy = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\log\left|\frac{y^2+1+\sqrt{2}y}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right| + 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y+1\right) + 2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y-1\right) + C\right\} .$$

* *

$\displaystyle\int \frac{y^2}{1+y^4}\,dy$ の計算

方法論は，上に述べたものと同じである．部分分数に分解されたかたちを (1.1) と同様にして

$$\frac{y^2}{1+y^4} = \frac{Ay+B}{y^2+1+\sqrt{2}y} + \frac{Cy+D}{y^2+1-\sqrt{2}y}$$

とすれば

$$(Ay+B)(y^2+1-\sqrt{2}y) + (Cy+D)(y^2+1+\sqrt{2}y) = y^2$$

でなければならないことになる．左辺は

$$\begin{aligned}
&Ay^3 - \sqrt{2}Ay^2 + Ay + By^2 - \sqrt{2}By + B + Cy^3 + \sqrt{2}Cy^2 + Cy + Dy^2 + \sqrt{2}Dy + D \\
&= (A+C)y^3 + (-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D)y^2 + (A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D)y + B + D
\end{aligned}$$

であったから

$$\begin{aligned}
&A + C = 0\ , \\
&-\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 1 \qquad \therefore\ \sqrt{2}(C-A) + (B+D) = 1\ , \\
&A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \qquad \therefore\ \sqrt{2}(D-B) + (A+C) = 0\ , \\
&B + D = 0\ ,
\end{aligned}$$

となって，結果として

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ , \quad B = 0\ , \quad C = \frac{\sqrt{2}}{4}\ , \quad D = 0\ .$$

それゆえ，もとの分数は

$$\frac{y^2}{1+y^4} = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}y}{y^2+1+\sqrt{2}y} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}y}{y^2+1-\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\frac{-y}{y^2+1+\sqrt{2}y} + \frac{y}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right\} .$$

右辺の各項は

$$\begin{aligned}
\frac{-y}{y^2+1+\sqrt{2}y} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{y^2+1+\sqrt{2}y} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{2y+\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y} - \frac{\sqrt{2}}{y^2+1+\sqrt{2}y}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{(y^2+1+\sqrt{2}y)'}{y^2+1+\sqrt{2}y} - \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\right\} , \\
\frac{y}{y^2+1-\sqrt{2}y} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{y^2+1-\sqrt{2}y} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2y-\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y} + \frac{\sqrt{2}}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{(y^2+1-\sqrt{2}y)'}{y^2+1-\sqrt{2}y} + \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\right\} ,
\end{aligned}$$

となる．まとめると

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{1+y^4} &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\frac{-y}{y^2+1+\sqrt{2}y}+\frac{y}{y^2+1-\sqrt{2}y}\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y^2+1+\sqrt{2}y)'}{y^2+1+\sqrt{2}y}-\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{(y^2+1-\sqrt{2}y)'}{y^2+1-\sqrt{2}y}+\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{-\left(\frac{(y^2+1+\sqrt{2}y)'}{y^2+1+\sqrt{2}y}-\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\right)+\left(\frac{(y^2+1-\sqrt{2}y)'}{y^2+1-\sqrt{2}y}+\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

である．本題の積分の計算は

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{y^2}{1+y^4}\,dy \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{-\left(\int \frac{(y^2+1+\sqrt{2}y)'}{y^2+1+\sqrt{2}y}\,dy-\int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y+1\right)^2+1}\,dy\right)+\left(\int \frac{(y^2+1-\sqrt{2}y)'}{y^2+1-\sqrt{2}y}\,dy+\int \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}y-1\right)^2+1}\,dy\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{-\log\left|y^2+1+\sqrt{2}y\right|+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y+1\right)+\log\left|y^2+1-\sqrt{2}y\right|+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y-1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\log\left|\frac{y^2+1-\sqrt{2}y}{y^2+1+\sqrt{2}y}\right|+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y+1\right)+2\tan^{-1}\left(\sqrt{2}y-1\right)+C\right\} .
\end{aligned}
$$