

フーリエ解析備忘録

version 0.2

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2014 年 12 月 11 日, revised 2019 年 2 月 9 日

数式の書き方についてのちょっとした註

数式について、筆者はわりと普通の書き方をしていると思っはいるが、もしかしたら特徴的なものかもしれない、ということをごここで述べておく。

「数式の定義または置き換え」については、 $:=$ を利用する。たとえば、いまここで、集合 S を $\{n^2 \mid n \text{ は自然数}\}$ の様に定義する、という事柄を、

$$S := \{n^2 \mid n \text{ は自然数}\}$$

の様に記す。これは項の置き換えも同様で、「いまここで、 f を展開してみよう。するとかくかくしかじかである。この時の A を α 、 B を β とおくと、,,」と言うような場合も次の様に記す:

$$\begin{aligned}\alpha &:= A, \\ \beta &:= B.\end{aligned}$$

計算の結果を直截に置き換えたい場合、 $=$ を用いる。なんらかの計算した結果、その次のことを考えて、 e^{i2t} にかかる係数を C 、 e^{-i2t} のそれを D としたい時には

$$\begin{aligned}2e^{i(2t+\pi/6)} &= 2e^{i2t} e^{i\pi/6} =: Ce^{i2t} \\ 2e^{-i(2t+\pi/6)} &= 2e^{-i2t} e^{-i\pi/6} =: De^{-i2t}\end{aligned}$$

と言ったような具合に記すことにする。

式の変形では、右、そして下の順序で進んでいるものとする。括弧内の数字が変形の順番である。

$$\begin{aligned}E &= F(1) = G(2) = H(3) \\ &= I(4) = J(5)\end{aligned}$$

数の集合については、

$$\begin{aligned}\text{自然数} &: \mathbf{N}, \\ \text{整数} &: \mathbf{Z}, \\ \text{有理数} &: \mathbf{Q}, \\ \text{実数} &: \mathbf{R}, \\ \text{複素数} &: \mathbf{C},\end{aligned}$$

と書く。これは一般的なものとそうは違わないはずである。

はじめに

本備忘録は、フーリエ変換・フーリエ級数についての事柄ををまとめてみたものである。きっかけは、`octave` という数値解析処理系で `fft` という高速フーリエ変換の関数に出会ったことであった。高速化の技術はともかくとして、フーリエ変換・フーリエ級数と言えば、筆者にはつねに積分とともにあったので、その数値解析メカニズムがにわかには想像がつかない遠いところにあった。そこで一度「離散フーリエ変換」をきちんと勉強しようと思ったのが本書を書いた動機である。

また「思いついた」時とほぼおなじ頃、確率やら統計やらが仕事柄必要になって、はるか昔に購入した小針著『確率・統計入門』[8]を読んでいた。その本にはフーリエ変換についてかかれた部分があって、「フーリエ変換は固有値によるスペクトル分解である」というような意味合いの事が書いてあり、かつ、昔の筆者のメモがはさんであった（よく紛失しなかったものだ）。学生時代の当時は理解したつもりであったのだろうが、メモを見ても意味と意図が不明だった。これも、もういちどきちんと勉強しよう、と思った動機である。

というわけで、筆者が立てた本書のゴールは、

離散フーリエ変換の導出およびその理解
サンプリング定理の導出およびその理解

である。上手くいっているかどうか自分では客観的には判断しづらいが、とにかくこれを目標に書き進めた。

なお、全般をとおして、対象とする関数はすべて「筋の良い」関数とした。フーリエ解析においては、諸処の場合において、解析的な条件（微分可能、絶対可積分、区分的に滑らか、和と積分の順序交換の条件、など）が示されることがおおいが、そこらへんはおおらかにすませた（というよりは「手がでない」というのが正直な所である）。また、固有値、固有値方程式、正規直交完全系による展開となれば「ベクトル」表記が見通しがいいと判断し、関数をベクトルと見立てる表現方法をも使った。

本書を書くにあたっては、佐藤著『図解雑学 フーリエ変換』[5]も参考にした。とてもお世話になった。鏡著『やる夫で学ぶデジタル信号処理』[3]も有益なドキュメントであった。筆者が不案内な信号処理に対する具体的なイメージ作成にも非常に有用であった。付録につけた `gnuplot` のプログラム作成については、山本著『`gnuplot` の精義』[7]にお世話になった。

本書は `TeX` を使って書いたのであるが、奥村著『[改訂第 5 版] `LATEX 2ε` 美文書作成入門』[1]と生田著『`LATEX 2ε` 文典』[10]がなければここまでは書けなかった。

上記著者の皆様に感謝致します。そして `Internet` と `Internet` 上に有意義なコンテンツを載せておられるたくさんの方々にも。

目次

はじめに	1
第 1 章 関数とベクトル	6
1.1 関数のベクトル表記と表現 $ x\rangle$	6
1.2 作用素の扱い	8
1.3 エルミート内積の積分表現	8
第 2 章 フーリエ変換	9
2.1 フーリエ変換の線形代数的構造	9
2.1.1 \hat{H} のエルミート性	9
2.1.2 \hat{H} の連続固有ベクトル	10
2.1.3 スペクトル分解と表現	11
2.2 フーリエ解析の言葉	12
2.3 フーリエ変換の線形性	12
2.4 フーリエ変換導出のまとめ	12
第 3 章 フーリエ級数 (1 周期分のフーリエ変換)	14
3.1 フーリエ級数の線形代数的構造	14
3.1.1 \hat{H} のエルミート性	14
3.1.2 \hat{H} の離散固有ベクトル	15
3.1.3 スペクトル分解と表現	16
3.1.4 定義域の拡張	17
3.2 フーリエ級数の言葉	17
3.3 フーリエ級数導出のまとめ	18
第 4 章 周期関数のフーリエ変換	20
4.1 δ 関数の再登場	20
4.2 フーリエ変換	20
4.3 フーリエ逆変換	21
4.4 離散変数関数との関連	21
第 5 章 フーリエ変換の対称性	22
第 6 章 離散変数関数のフーリエ変換	24
6.1 一般的な離散変数関数	24
6.1.1 離散変数関数の連続変数化	24
6.1.2 スペクトル分解, フーリエ変換	25
6.2 サンプリング離散変数関数	26

6.2.1	サンプリング離散変数関数のフーリエ変換の特徴 (周期性)	26
6.2.2	スペクトル分解の積分をフーリエ変換の1周期分だけにと	27
6.2.3	フーリエ変換の対称性から	29
6.3	まとめ	29
第7章	離散フーリエ変換	31
7.1	周期的なサンプリング離散変数関数	31
7.1.1	1周期内のサンプリング点	31
7.2	フーリエ級数によるスペクトル分解	31
7.2.1	フーリエ係数の周期性	32
7.2.2	スペクトル分解の和をフーリエ係数1周期分だけにと	33
7.2.3	フーリエ変換の対称性から	34
7.3	離散フーリエ変換	35
7.3.1	行列による表現	35
7.3.2	行列相互の関係	38
7.3.3	フーリエ変換の成分の関係	38
7.3.4	具体的な量との関係	39
7.4	ベクトル表現	40
第8章	フーリエ変換の関連図	42
第9章	合成積 (畳み込み積, convolution) とそのフーリエ変換	43
9.1	合成積 (畳み込み積, convolution)	43
9.2	合成積のフーリエ変換	44
9.3	積のフーリエ変換	44
第10章	フーリエ解析の実践	47
10.1	そもそも何を計算するのか	47
10.2	フーリエ級数編	47
10.2.1	周期 $2L$ の関数 $2\sin(2\Omega t)$ のフーリエ級数	47
10.2.2	周期 2π の関数 $2\sin(t)+4\sin(2t+\pi/6)$ のフーリエ級数	49
10.2.3	周期 2π のノコギリ波のフーリエ級数	51
10.2.4	フーリエ級数の実数表現の導出	53
10.3	フーリエ変換編	55
10.3.1	導関数のフーリエ変換	55
10.3.2	フーリエ変換の微分	56
10.3.3	δ 関数のフーリエ変換	56
10.3.4	複素指数関数, 三角関数のフーリエ変換	56
10.3.5	実指数関数のフーリエ変換	57
10.3.6	$e^{-at}e^{ibt}$ のフーリエ変換	58
10.3.7	楕円関数のフーリエ変換	59
10.3.8	矩形関数 (パルス波) のフーリエ変換	60
10.3.9	ガウス関数のフーリエ変換	63
10.4	離散フーリエ変換編	65

10.4.1 $\sqrt{2}((n \bmod 8) + 1)\sin((\pi/4) \cdot n)$ の離散フーリエ変換	65
第 11 章 サンプリング定理	69
11.1 信号処理系の用語	69
11.2 問題の設定	70
11.3 サンプリング離散変数関数フーリエ変換による道具立て	70
11.4 解法の戦略	71
11.4.1 $X_s(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係	71
11.4.2 帯域の制限	72
11.4.3 $X(\omega)$ をバイパスした $x(t)$ の導出	73
11.4.4 信号処理系の用語再び	75
11.5 理路の整理	76
11.6 具体例	78
11.6.1 三角関数の場合	78
11.6.2 レコードの例	80
11.7 最後に	81
付録 A Proof of Some Theorems	82
A.1 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 2\pi\delta(k, 0)$	82
A.2 $\sum_{l=0}^{N-1} \exp(i\frac{2\pi}{N}(j-k)l) = N\delta(j, k)$	83
A.3 $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixK}/x) dx$	84
A.4 $\int_{-L}^L = \int_0^{2L}$ (周期 $2L$)	85
付録 B $\delta(x)$ 関数あれこれ	87
B.1 特徴的な性質	87
B.2 積分による表現	87
B.3 離散変数関数と δ 関数の運用	89
付録 C フーリエ級数からの導出	91
C.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ	91
C.2 フーリエ級数から離散フーリエ変換へ	92
付録 D 波動用語入門	96
D.1 周期関数	96
D.1.1 周期	96
D.1.2 振動数	97
D.2 複素指数関数による分析	98
D.3 波動理論	99
D.3.1 波長, 波数	99
D.3.2 周波数 (振動数) と波数の関係	100
D.3.3 波動の表現形式	100

付録 E Gnuplot programs	103
E.1 $2\sin(t)+4\sin(2t+\pi/6)$ のプログラム (図 10.1)	103
E.2 周期 2π ノコギリ波 $N(x)=2(x/2\pi - [(x/2\pi + 1/2)])$	104
E.3 $N(x)=2(x/2\pi - [(x/2\pi + 1/2)])$ のプログラム (図 10.2)	104
E.4 δ 関数がならんだ楕円関数のイメージのプログラム (図 10.3)	104
E.5 $2d \cdot \text{sinc}(\lambda d)$ で $d=3$ のプログラム (図 10.4)	105
E.6 $X(\omega)$ のサンプルグラフその 1 のプログラム (図 11.1)	106
E.7 $X(\omega)$ のサンプルグラフその 2 のプログラム (図 11.2)	107
E.8 $\cos(t)$ のサンプリングのグラフのプログラム (図 11.3)	108
E.9 $\sin(t)$ のサンプリングのグラフのプログラム (図 11.4)	109
E.10 $1+3\cos(t)+\cos(2t)$ のサンプリングのグラフのプログラム (図 11.5)	112
E.11 短冊長方形をはめ込んだグラフのプログラム (図 C.1)	114
E.12 $\cos(u)$ のグラフのプログラム (図 D.1)	115
E.13 $\cos(u), \cos(u/2), \cos(u/3)$ を同時に表示したグラフのプログラム (図 D.2)	115
E.14 負の振動数の解釈イメージのプログラム (図 D.3)	116
E.15 x を固定化した波動イメージのプログラム (図 D.4)	117
E.16 t を固定化した波動イメージのプログラム (図 D.5)	118

第1章 関数とベクトル

関数とベクトルに対応をつける表現 $|x\rangle$ を導入する．そしてエルミート¹内積の積分表現を導く．

1.1 関数のベクトル表記と表現 $|x\rangle$

実数変数関数を $f(x)$, $g(x)$ などとあらわすことにする．実数変数の関数の群れである．関数そのものの解析的な性質の分析には直截的にこの $f(x)$ という表記で扱うほうが見通しがよい（例えば導関数の導出や積分など）．なにより馴染みも深く慣れている．しかしながら，ベクトルの世界の線形代数的な性質が有効な場合もある．これから見ていくフーリエ変換によるスペクトル分解もその一例であろう．関数とベクトルを対応させようとする動機はここにある．

まずベクトルの表記を決めておこう．ベクトル p というものを

$$|p\rangle$$

と書く事にする． p はベクトルを他のベクトルから区別するための名前である．そして2つのベクトルからスカラーを与えるエルミート内積（単に「内積」と呼んでしまう事もある）演算を

$$\langle p|q\rangle$$

と記すことにする．エルミート内積であるから，

$$\langle p|q\rangle^* = \langle q|p\rangle$$

が成り立つことが要請される．

関数とベクトルの対応の仕方には，様々なやり方が考えられるだろう．その様々なものから，実数 x とベクトル $|x\rangle$ を対応させるモデルを選ぶことにしよう（ただしこの x という記号に特別な意味はない．実数と対応するものであれば他の記号でももちろんかまわない）．このモデルは，エルミート作用素 \hat{x} を導入して

$$\begin{aligned}\hat{x}|x\rangle &= x|x\rangle \\ \langle x'|x\rangle &= \delta(x' - x)\end{aligned}$$

となる関係を基本にし，ここから導出される正規直交完全基底ベクトルの系 $\{|x\rangle\}$ を表現に用いるモデル² である．これを「表現 $|x\rangle$ 」と呼ぼう（正規直交完全基底ベクトル $|x\rangle$ による表現，という意味合いである）．もちろん x と $|x\rangle$ は1対1に対応している．また $\delta(x)$ は超関数として有名なデルタ関数³ である．完全性， $|x\rangle$ へ

¹Charles Hermite

²エルミート作用素，正規直交完全基底ベクトル，さらに付け加えればエルミート内積，固有ベクトルと固有関数，それらの表記の関係などについて，あるひとつの文章を書いたみた（『エルミート内積空間のスペクトル分解，固有ベクトルと固有関数までの道のり』[2]）．一読いただけるととても嬉しい．

³最初 P.A.M Dirac が量子力学の定式化で導入した関数「もどき」．今では立派に超関数として存在が確立されている．この関数については，付録 B(p.87) に簡単な注釈をつけた．詳細については後藤らの本 [4, p.254–260] が参考になる．

の射影作用素はつぎのとおりである：

$$\hat{1} = \int |x\rangle dx \langle x|,$$

$$\hat{P}_x = |x\rangle \langle x|.$$

関数 $f(x)$ に対応するベクトルが $|f\rangle$ だったとしよう。表現 $|x\rangle$ のもとでは、 $|f\rangle$ の $|x\rangle$ 方向の成分は射影作用素 $\hat{P}_x = |x\rangle \langle x|$ を用いて、

$$\hat{P}_x |f\rangle = |x\rangle \langle x|f\rangle$$

と表せる。ここで、

$$|x\rangle \text{ 方向の成分が } \langle x|f\rangle \text{ である} \iff \text{点 } x \text{ での値が } f(x) \text{ である}$$

を認めることにする。 x と $|x\rangle$ は 1 対 1 に対応している事実からこれは素直に受け入れられよう。つまり $|x\rangle$ 方向の成分が関数値 $f(x)$ と等しいとして、

$$\langle x|f\rangle = f(x)$$

という表現を採用するのである。本書ではこれを「ベクトルの関数表現（または単に「関数表現」）」と呼ぶ事にする。具体的な点 x_i に着目すれば、その点 x_i での関数値は

$$\langle x_i|f\rangle = f(x_i)$$

となる。これらの約束ごとを受けて、関数 $f(x)$ に対応するベクトル $|f\rangle$ を簡便的に

$$|f\rangle = |f(x)\rangle$$

と表現することにしよう。これより、

$$\langle x|f(x)\rangle = f(x)$$

とも書ける。ベクトルということから線形性も明らかであるといってもよいだろうがそれも一応見ておこう。今 $h(x) = f(x) + g(x)$ であるとすると、

$$\langle x|f(x)\rangle + \langle x|g(x)\rangle = f(x) + g(x) = h(x)$$

となる。一方

$$\langle x|h(x)\rangle = h(x)$$

でもあるので、これから

$$\langle x|h(x)\rangle = \langle x|f(x)\rangle + \langle x|g(x)\rangle \iff |h(x)\rangle = |f(x) + g(x)\rangle = |f(x)\rangle + |g(x)\rangle$$

ということが言える。

これらの対応関係を見てみると、例えば次のようになる：

$$\begin{aligned} |\sin(x)\rangle &\longleftrightarrow \langle x|\sin(x)\rangle = \sin(x) \\ |\log(x)\rangle &\longleftrightarrow \langle x|\log(x)\rangle = \log(x) \\ |ax^2 + bx + c\rangle = |ax^2\rangle + |bx\rangle + |c\rangle &\longleftrightarrow \langle x|ax^2 + bx + c\rangle = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

1.2 作用素の扱い

作用素 \hat{x} からのみ構成される任意の作用素 $\hat{X}(\hat{x})$ のこのモデルによる表現は、

$$\hat{X} \text{ 内の } \hat{x} \text{ を } x \text{ に変えたもの (} \underline{X}(x) \text{ と表記する)}$$

となる。具体例は、

$$\begin{aligned} \hat{X}(\hat{x}) = \alpha \hat{x} \hat{x} + \beta \hat{x} + \gamma &\longleftrightarrow \underline{X}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ \hat{X}(\hat{x}) = \frac{d}{d\hat{x}} &\longleftrightarrow \underline{X}(x) = \frac{d}{dx} \end{aligned}$$

などである。 $\underline{X}(x)$ に変換してしまったあとは、ベクトルに対して次のような演算も可能になる：

$$\hat{X}(\hat{x})|f(x)\rangle = \underline{X}(x)|f(x)\rangle = |\underline{X}(x)f(x)\rangle.$$

1.3 エルミート内積の積分表現

このモデルの正規直交完全基底の完全性の表現は、

$$\hat{1} = \int |x\rangle dx \langle x|$$

であった。ベクトルのエルミート内積は、この完全性の表現を利用することにより、

$$\begin{aligned} \langle g(x)|f(x)\rangle &= \langle g(x)|\hat{1}|f(x)\rangle = \langle g(x)|\left(\int |x\rangle dx \langle x|\right)|f(x)\rangle \\ &= \int \langle g(x)|x\rangle dx \langle x|f(x)\rangle = \int \langle x|g(x)\rangle^* dx \langle x|f(x)\rangle \\ &= \int g^*(x)f(x) dx \end{aligned}$$

と具体的な積分の形にあらわせる。なおここでは、とりあえず積分範囲は定めない。これから考察していく対象次第でいろいろ変化する（変化させる）ものであると捉えておこう。

第2章 フーリエ変換

エルミート内積空間，正規直交完全基底ベクトルを導出し，それらからフーリエ¹変換を定義し，それが基底ベクトルに対するスペクトル分解であることを見る．

2.1 フーリエ変換の線形代数的構造

$f(x), g(x)$ は，「筋のよい関数²」であるものとしよう．さらに，それらの関数には

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

という性質をがえるものとしよう．仮定である．

さて今，

$$\hat{H} := -i \frac{d}{dx}$$

という作用素を考える³．以下，この作用素を基本にしてあるひとつの正規直交完全基底ベクトルの系を獲得し，その基底ベクトルによる表現を見ていく⁴．なおここでは，内積の積分範囲において，次のようにまず実数全空間をとることとする：

$$\langle g(x) | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) dx.$$

2.1.1 \hat{H} のエルミート性

作用素 \hat{H} のエルミート性を確かめる．表現 $|x\rangle$ を利用して，エルミート内積を計算しよう．

$$\begin{aligned} \langle g(x) | \hat{H} | f(x) \rangle &= \left\langle g(x) \left| -i \frac{d}{dx} \right| f(x) \right\rangle = \left\langle g(x) \left| -i \frac{d}{dx} f(x) \right. \right\rangle \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) \frac{df(x)}{dx} dx = -i \left\{ [g^*(x) f(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) dx \right\} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) dx \end{aligned}$$

¹Jean Baptiste Joseph Fourier

²連続とか，微分可能とかそういうもろもろの「可能性」に気がつかわず，じゃんじゃん演算してよい，という感覚である．すこし細かく言えば，区分的に滑らかで連続，かつ，絶対可積分であることが必要．

³なんとではなく都合の良い導入であるが，背景には指数関数を正規直交完全系の基底ベクトルにしたいというアイデアが隠れている．指数関数が，微分してもその関数形を変えないという性質を持っていることがその動機としては大きい．そしてそれにエルミート性を持たせるために，このような作用素の形にした，というのが舞台裏である．また， \hat{H} ではなく， $\hat{K} := i \cdot d/dx$ をもエルミート作用素であるので，この \hat{K} による直交完全基底ベクトルをもちいてもほぼ同様な議論ができる． \hat{H} を選んだのは，歴史的理理由という他はないであろう．

⁴これからは単に「基底ベクトル」と書いた場合は，それは正規直交完全系をなすベクトルであるとする．

である。一方,

$$\begin{aligned}\langle f(x)|\hat{H}|g(x)\rangle &= \left\langle f(x)\left|-i\frac{d}{dx}\right|g(x)\right\rangle = \left\langle f(x)\left|-i\frac{d}{dx}g(x)\right\rangle \\ &= -i\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\frac{dg(x)}{dx}dx\end{aligned}$$

と変形できるので (あえてここまでしか計算しないのが味噌), これの複素共役をとると,

$$\begin{aligned}\langle f(x)|\hat{H}|g(x)\rangle^* &= \left(-i\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\frac{dg(x)}{dx}dx\right)^* \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} \left(f^*(x)\frac{dg(x)}{dx}\right)^*dx \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{dg^*(x)}{dx}dx\end{aligned}$$

となる。なお部分積分において, $[g^*(x)f(x)]_{-\infty}^{\infty}$ の項は, 対象としている関数が $x \rightarrow \pm\infty$ で 0 であることを利用して, 項全体も 0 になることをもちいている。さてこの最後の形をぐっとみると

$$\langle f(x)|\hat{H}|g(x)\rangle^* = \langle g(x)|\hat{H}|f(x)\rangle,$$

つまり \hat{H} がエルミート作用素であることが確認できた。

2.1.2 \hat{H} の連続固有ベクトル

\hat{H} がエルミート作用素であることがわかったということから何が言えるか? それは, \hat{H} に対する固有値方程式 $\hat{H}|p\rangle = \lambda_p|p\rangle$ をみたす固有ベクトルがあれば, その固有値は実数であり, かつ, 異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する, ということであった⁵。そこでいま λ を任意の実数として, $|e^{i\lambda x}\rangle$ を考える⁶。すると,

$$\hat{H}|e^{i\lambda x}\rangle = -i\frac{d}{dx}|e^{i\lambda x}\rangle = -i\left|\frac{d}{dx}e^{i\lambda x}\right\rangle = \lambda|e^{i\lambda x}\rangle$$

であり, 固有値方程式を満たすことがわかる。つまり, $|e^{i\lambda x}\rangle$ は連続固有値 λ をもつ固有ベクトルなのである。したがってこれは直交完全基底ベクトルであるはずで, 実際に内積をみてみると,

$$\langle e^{i\lambda'x}|e^{i\lambda x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda'x}e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda'-\lambda)x}dx$$

である。天下りの δ 関数の積分表現

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} d\omega$$

を導入しよう。 δ 関数の定義と思ってもらっても差し支えない。これを応用すると,

$$\langle e^{i\lambda'x}|e^{i\lambda x}\rangle = 2\pi\delta(\lambda' - \lambda)$$

となり, 直交性が確認できる。 $\{|e^{i\lambda x}\rangle | \lambda \in \mathbf{R}\}$ は直交完全系をなしている。

⁵エルミート理論 (固有値方程式理論) の適用。

⁶この関数 $e^{i\lambda x}$ はこの後見るように固有ベクトルをなす関数 (それを固有関数と呼ぶ) であるから当然今考えている仮定のなりたつ関数でもあるはずだ。であれば性質 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{i\lambda x} = 0$ を満たすべきだが, 本当にそうなるだろうか? ちょっとそうは思えない。森毅の本「現代の古典解析」 [9, p.244] には「固有関数がハマダシている」という記述がある。とにかくいまはこの事実に対して目をつむる。

2.1.3 スペクトル分解と表現

エルミート作用素 \hat{H} に基づく、実数全体が固有値となる直交完全系 $\{|e^{i\lambda x}\rangle | \lambda \in \mathbf{R}\}$ が得られた。この表現モデルを整理すると、

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -i \frac{d}{d\hat{x}} \\ \hat{H} |e^{i\lambda x}\rangle &= \lambda |e^{i\lambda x}\rangle \\ \langle e^{i\lambda x} | e^{i\lambda' x} \rangle &= 2\pi \delta(\lambda - \lambda')\end{aligned}$$

を基本にして、射影作用素や完全性は

$$\begin{aligned}\hat{P}_\lambda &= |e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x}| \\ \hat{1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle d\lambda \langle e^{i\lambda x}| \end{aligned}$$

であらわせる。したがって任意のベクトル $|f(x)\rangle$ は、

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle$$

と表現できる。この表現形式を「表現 $|e^{i\lambda x}\rangle$ 」と呼ぼう。

ベクトルを、ある正規直交完全基底ベクトルに分解したものを「スペクトル分解」と呼ぶこともある。今 \hat{H} をもとにして、ベクトルの分解形式を得た。そして基底ベクトル $|e^{i\lambda x}\rangle$ 方向の成分は $\langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle$ と計算できている（この成分をスペクトルと呼ぶこともある）。 $\{|e^{i\lambda x}\rangle | \lambda \in \mathbf{R}\}$ のおおのの基底ベクトルに対して連続的なスペクトル分解が出来上がったのである。成分（スペクトル）となる内積をあらわに書けば

$$\langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

である（表現 $|x\rangle$ による内積の表現を思い出そう）。 \hat{x} の方にもこのスペクトル分解の見方をすれば、基底ベクトル $|x\rangle$ 方向の成分は $\langle x | f(x) \rangle = f(x)$ であって、関数そのものがスペクトルになっているのである。スペクトル分解による基底ベクトルの成分をまとめてみると、

$$\text{(表現 } |x\rangle \text{ での基底ベクトル方向のスペクトル (成分))} = \langle x | f(x) \rangle = f(x)$$

$$\text{(表現 } |e^{i\lambda x}\rangle \text{ での基底ベクトル方向のスペクトル (成分))} = \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

となる。

さて今一度ベクトル $|f(x)\rangle$ を考える。いま2つの表現形式で、

$$|f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle dx \langle x | f(x) \rangle \quad \text{(表現 } |x\rangle \text{)} \quad (2.1.1)$$

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle \quad \text{(表現 } |e^{i\lambda x}\rangle \text{)} \quad (2.1.2)$$

が得られた。これは、異なる基底ベクトルで $|f(x)\rangle$ をあらわしているものである。とはいえ、同じベクトルであるから実体も同じである⁷。となると、上記はどのような関係を反映しているのか？ここで、表現 $|x\rangle$ での関係 $f(x) = \langle x | f(x) \rangle$ に着目する。(2.1.2)の $|f(x)\rangle$ と $|x\rangle$ との内積をとると、

$$\langle x | f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | e^{i\lambda x} \rangle d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle \iff f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle$$

となる。関数主体の見方をとれば、基底ベクトルの変換によって $f(x)$ が異なる表現を得たことになるのである⁸。

⁷ そうでなければ「ベクトル」ではない。ベクトルは座標とは無関係に存在するものであった、と学生時代を思い出す。

⁸ かつてデカルト座標と極座標でベクトルの表現が代わったことを思いだそう。これも基底ベクトルの変換に他ならない。

2.2 フーリエ解析の言葉

フーリエ解析の分野の言葉で言えば,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle$$

が「関数 $f(x)$ のフーリエ逆変換」, 「関数 $f(x)$ のフーリエ展開」, 「関数 $f(x)$ の固有値 λ によるスペクトル分解」などと呼ばれる. そして, $|f(x)\rangle$ の $\{e^{i\lambda x}\}$ 方向の成分である

$$\langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

を「関数 $f(x)$ のフーリエ変換」と呼ぶ. このフーリエ変換の積分は, dx に対する定積分なので, その値は x には依存しない. よって λ の関数となる. また関数 $f(x)$ が異なれば違うものになる. よってそれらを含んだ上で, $f(x)$ のフーリエ変換を, $F_f(\lambda)$, $F[f(x)](\lambda)$ のように, 「汎関数的」な味わいを含めて表したりもする. 具体的に書き記せば,

$$F_f(\lambda) = F[f(x)](\lambda) := \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

である. これらの意味合いは,

フーリエ変換は「基底ベクトル $|e^{i\lambda x}\rangle$ 方向の成分 (スペクトル) となる内積」

フーリエ逆変換は「スペクトル分解式」

ということである.

関数に着目した言葉遣いとして, 基底ベクトルをなす関数 (いまの例だと $e^{i\lambda x}$) を直交関数, 作用素の固有ベクトルを固有関数と言ったりもする. もちろん直交基底ベクトルは固有ベクトルでもあるので, 直交固有関数とも言う場合もある. そこらへんの単語の組み合わせは, わりとおおらかである.

2.3 フーリエ変換の線形性

ベクトルとの対応から出発したのではほぼ明らかなことではあるが, フーリエ変換の線形性を確認しておこう.

$$|q(x)\rangle := \alpha |f(x)\rangle + \beta |g(x)\rangle \quad (\alpha, \beta \text{ は任意のスカラー})$$

としてフーリエ変換を計算すれば線形性が見える:

$$\begin{aligned} F_q(\lambda) &= \langle e^{i\lambda x} | q(x) \rangle \\ &= \langle e^{i\lambda x} | (\alpha |f(x)\rangle + \beta |g(x)\rangle) \rangle \\ &= \alpha \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle + \beta \langle e^{i\lambda x} | g(x) \rangle \\ &= \alpha F_f(\lambda) + \beta F_g(\lambda). \end{aligned}$$

2.4 フーリエ変換導出のまとめ

フーリエ変換の導出の過程をまとめておこう.

前提条件 (仮定)

- $f(x), g(x)$ らは「筋のよい関数」
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ が成立する.



エルミート理論の適用 (連続固有値)

- 作用素 $\hat{H} = -i \frac{d}{dx}$ に対する固有値方程式
- 基底ベクトル $\{ |e^{i\lambda x}\rangle \mid \lambda \in \mathbf{R} \}$



フーリエ変換

- フーリエ変換 (基底ベクトルに対する成分 (スペクトル))
 - $F_f(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx$
- フーリエ逆変換, フーリエ展開 (基底ベクトルによるスペクトル分解)
 - $|f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle F_f(\lambda) d\lambda$ (ベクトル表現)
 - $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F_f(\lambda) d\lambda$ (関数表現)

第3章 フーリエ級数（1周期分のフーリエ変換）

周期関数という制約条件を課すことにより、固有値が離散的となることを利用してフーリエ変換からフーリエ級数を導く。議論の展開はフーリエ変換とほぼ一緒である。

3.1 フーリエ級数の線形代数的構造

前章でのべたフーリエ変換の舞台に、「対象とする関数は周期 $2L$ の周期関数のみ」という条件をつけてみよう。

周期関数に対しては、フーリエ変換の土台となっていた $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ という条件よりも、より具体的で強い条件が出てくる。まず、周期 $2L$ であるから、 $f(L) = f(-L)$ でなければならない。さらに $f(x) = f(x + 2L)$ （周期関数の外延性）でもある。この外延性から、1周期分で $f(x)$ を考察すれば、それは全領域に適用できることになる。したがって当面は、変数の定義域を $-L \leq x \leq L$ として論じていこう。

$f(x), g(x)$ を $-L \leq x \leq L$ で定義された周期 $2L$ の関数であるとしよう。作用素はフーリエ変換の場合とおなじで、 $\hat{H} := -id/d\hat{x}$ である。以下、この作用素を基本にして正規直交完全基底ベクトルを獲得し、その基底ベクトルによる表現を見ていく方針にはかわりはない。ただし内積の積分範囲においては注意が必要で、 x の定義域（関数の周期）を意識して

$$\langle g(x) | f(x) \rangle_{2L} = \int_{-L}^L g^*(x) f(x) dx.$$

と約束することにする。1周期分の積分として取り扱うのである（1周期を強調する意味で、添字 $2L$ をつけた）。

3.1.1 \hat{H} のエルミート性

作用素 \hat{H} のエルミート性を確かめる。表現 $|x\rangle$ を利用して、エルミート内積を計算しよう。計算は積分範囲意外はフーリエ変換の場合と全く同様である。まず

$$\begin{aligned} \langle g(x) | \hat{H} | f(x) \rangle_{2L} &= \left\langle g(x) \left| -i \frac{d}{d\hat{x}} \right| f(x) \right\rangle_{2L} = \left\langle g(x) \left| -i \frac{d}{dx} f(x) \right\rangle_{2L} \\ &= -i \int_{-L}^L g^*(x) \frac{df(x)}{dx} dx = -i \left\{ [g^*(x)f(x)]_{-L}^L - \int_{-L}^L \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) dx \right\} \\ &= i \int_{-L}^L \frac{dg^*(x)}{dx} f(x) dx. \end{aligned}$$

一方、

$$\langle f(x) | \hat{H} | g(x) \rangle_{2L} = \left\langle f(x) \left| -i \frac{d}{d\hat{x}} \right| g(x) \right\rangle_{2L} = \left\langle f(x) \left| -i \frac{d}{dx} g(x) \right\rangle_{2L} = -i \int_{-L}^L f^*(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$$

となり，複素共役をとると，

$$\langle f(x)|\hat{H}|g(x)\rangle_{2L}^* = \left(-i \int_{-L}^L f^*(x) \frac{dg(x)}{dx} dx\right)^* = i \int_{-L}^L \left(f^*(x) \frac{dg(x)}{dx} dx\right)^* = i \int_{-L}^L f(x) \frac{dg^*(x)}{dx} dx$$

となる．なお部分積分において， $[g^*(x)f(x)]_{-L}^L$ の項は，対象としている関数が周期 $2L$ の関数であること，つまり， $f(-L)=f(L), g(-L)=g(L)$ であることを利用して，項全体も 0 になることをもちいている．結果

$$\langle f(x)|\hat{H}|g(x)\rangle_{2L}^* = \langle g(x)|\hat{H}|f(x)\rangle_{2L}$$

つまり \hat{H} がエルミート作用素であることが確認できた．

3.1.2 \hat{H} の離散固有ベクトル

\hat{H} がエルミート作用素であることから，これもまたフーリエ変換の場合と同様， $|e^{i\lambda x}\rangle$ は固有値方程式を満たす固有ベクトルであり，基底ベクトルとなるはずである．ここで周期関数であるということから導かれる重要な事柄，つまり固有値の離散性を導こう．

‡ 関数の周期性からの導出

フーリエ変換による $f(x)$ スペクトル分解は，

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle F_f(\lambda) d\lambda$$

であり，関数表現に移行すれば

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F_f(\lambda) d\lambda$$

であった．これを用いると

$$\begin{aligned} f(L) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda L} F_f(\lambda) d\lambda \\ f(-L) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda L} F_f(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} f(L) = f(-L) &\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda L} F_f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda L} F_f(\lambda) d\lambda \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}) F_f(\lambda) d\lambda = 0 \\ &\Rightarrow e^{i\lambda L} = e^{-i\lambda L} \Rightarrow e^{i2\lambda L} = 0 \Rightarrow 2\lambda L = 2\pi n \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2L} n \quad (n \in \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

‡ 基底ベクトルどうしの直交性からの導出

基底ベクトルどうしの 1 周期分の内積を計算すると，

$$\langle e^{i\lambda' x} | e^{i\lambda x} \rangle_{2L} = \int_{-L}^L e^{-i\lambda' x} e^{i\lambda x} dx = \int_{-L}^L e^{i(\lambda - \lambda')x} dx = \begin{cases} 2L & (\lambda = \lambda'), \\ \frac{2}{\lambda - \lambda'} \sin((\lambda - \lambda')L) & (\lambda \neq \lambda') \end{cases}$$

ともとまる¹。基底ベクトルは直交するのだから、 $\lambda \neq \lambda'$ の時は 0 にならなければならない。つまり、 λ, λ' に対して、

$$\sin((\lambda - \lambda')L) = 0 \implies (\lambda - \lambda')L = \pi \cdot m \quad (m \in \mathbf{Z})$$

という条件がつく。すこし技巧的であるがこの条件は

$$\lambda = \frac{\pi}{L}n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

とあらわすことができる²。

以上から、固有値 λ は離散的であることがわかった。したがって、基底ベクトルも離散固有ベクトルとなる。

3.1.3 スペクトル分解と表現

固有値に戻る。固有値は

$$\lambda = \frac{2\pi}{2L}n =: n\Lambda =: \lambda_n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

で離散的であった。エルミート作用素 \hat{H} に基づいて、離散固有値をもつ直交完全系 $\{|e^{i\lambda_n x}\rangle | n \in \mathbf{Z}\}$ が得られた。この基底ベクトルの直交性は、内積計算から、

$$\langle e^{i\lambda_m x} | e^{i\lambda_n x} \rangle_{2L} = \int_{-L}^L e^{-i\lambda_m x} e^{i\lambda_n x} dx = \int_{-L}^L e^{-i(\lambda_m - \lambda_n)x} dx = \int_{-L}^L e^{-i\Lambda(m-n)x} dx = 2L\delta(m, n)$$

と確認できる³。

エルミート理論をもとにこの表現モデルを整理すると、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -i \frac{d}{dx} \\ \hat{H} |e^{i\lambda_n x}\rangle &= \lambda_n |e^{i\lambda_n x}\rangle \\ \hat{P}_n &= |e^{i\lambda_n x}\rangle \langle e^{i\lambda_n x}| \\ \hat{1} &= \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{i\lambda_n x}\rangle \langle e^{i\lambda_n x}| \end{aligned}$$

であらわせる⁴。したがって任意のベクトル $|f(x)\rangle$ は、

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{i\lambda_n x}\rangle \langle e^{i\lambda_n x} | f(x) \rangle_{2L}$$

と表現できる。ここまでの理路は、周期性を条件とし、 \hat{H} をもとにして、離散的な基底ベクトル $\{|e^{i\lambda_n x}\rangle | n \in \mathbf{Z}\}$ を獲得、そして離散的なスペクトル分解の形成という段取りである。基底ベクトル $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ 方向の成分は $\langle e^{i\lambda_n x} | f(x) \rangle_{2L}$ と計算できて、その内積をあらわに書けば

$$\langle e^{i\lambda_n x} | f(x) \rangle_{2L} = \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx$$

¹この関数形は、10.3.8『矩形関数のフーリエ変換』のところで再度お目にかかる形で、「sinc 関数」と呼ばれるものである。

² $\lambda = j(\pi/L)$, $\lambda' = k(\pi/L)$, $j \neq k$ とすると、 $\lambda - \lambda' = (j - k)(\pi/L)$ 。 $j - k$ は整数だからそれを n とする。

³いままでの議論からこれは明らかであるが、この積分については、付録 A.1(p.82) に公式的な導出方法を記述した。また、 $\delta(m, n)$ はクロネッカー (Leopold Kronecker) の δ として著名なものである。

⁴ $\sum_{n \in \mathbf{Z}}$ は、「 n を整数として $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ 」のことを意味することにしよう。

である。この表現形式を「表現 $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ 」と呼ぼう。

さて今一度ベクトル $|f(x)\rangle$ を考える。いま2つの表現形式で、

$$|f(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle dx \langle x|f(x)\rangle \quad (\text{表現 } |x\rangle) \quad (3.1.1)$$

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{i\lambda_n x}\rangle \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} \quad (\text{表現 } |e^{i\lambda_n x}\rangle) \quad (3.1.2)$$

$$(3.1.3)$$

が得られた。フーリエ変換の場合と同様に、(3.1.2)の $|f(x)\rangle$ と $|x\rangle$ との内積をとると、

$$\langle x|f(x)\rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle x|e^{i\lambda_n x}\rangle \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} \iff f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L}$$

となる。 $f(x)$ がまた異なる表現を得た。ここまでの理路はまったくフーリエ変換の場合と同様である。

3.1.4 定義域の拡張

ここまでは、定義域を $-L \leq x \leq L$ として考えてきた。一方周期関数の外延性から、 $f(x) = f(x+2L)$ である。つまり、 $-L \leq x \leq L$ で成立したことは、 $L \leq x \leq 3L$ でも成立する。これを無限にまで拡張し、結局実数 x の範囲で成立するということがわかる。周期 $2L$ はこのエルミート内積の範囲として効いてくるのである。

確認をしておこう。内積に対しては、

$$\begin{aligned} \langle e^{i\lambda_n(x+2L)}|f(x+2L)\rangle_{2L} &= \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n(x+2L)} f(x+2L) dx = \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} e^{-i\lambda_n \cdot 2L} f(x+2L) dx \\ &= \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} e^{-in2\pi} f(x+2L) dx = \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx \\ &= \langle e^{i\lambda_n(x)}|f(x)\rangle_{2L} \end{aligned}$$

で変わらない。 $f(x)$ 自身も、内積 $\langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L}$ が x に依存しないことを留意して計算すれば

$$\begin{aligned} f(x+2L) &= \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n(x+2L)} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} e^{i\lambda_n \cdot 2L} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} e^{in2\pi} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

となり、変化はない。

3.2 フーリエ級数の言葉

フーリエ級数の分野の言葉で言えば、文字どおり

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L}$$

が「関数 $f(x)$ のフーリエ級数」である。そして、 $|f(x)\rangle$ の $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ 方向の成分である $\langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L}$ に係数 $1/2L$ を掛けたもの

$$\frac{1}{2L} \langle e^{i\lambda_n x}|f(x)\rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx$$

を「関数 $f(x)$ のフーリエ係数」と呼ぶ。このフーリエ係数の積分は、 dx に対する定積分なので、その値は x には依存しない。 λ_n ($\lambda_n = n\Lambda, \Lambda 2L = 2\pi$) の関数である。その意味に加えて積分が 1 周期分であることも合わせて、これを $F_f^\circ(\lambda_n)$, $F^\circ[f(x)](\lambda_n)$ などと表すことにする。 x に関する 1 周期分のフーリエ変換と記憶してもよい。具体的に記せば、

$$F_f^\circ(\lambda_n) = F^\circ[f(x)](\lambda_n) := \frac{1}{2L} \langle e^{i\lambda_n x} | f(x) \rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx$$

$$|f(x)\rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{i\lambda_n x}\rangle F_f^\circ(\lambda_n)$$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} F_f^\circ(\lambda_n)$$

であり、その意味合いは

フーリエ係数は「基底ベクトル $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ 方向の成分となる 1 周期分の内積に $1/2L$ を掛けたもの」

フーリエ級数は「スペクトル分解式」

ということである⁵。

フーリエ係数の特徴的なことを付け加えておこう。 $\lambda_n = n\Lambda$ であることから、 $\lambda_{(-n)} = -n\Lambda$ であることが見て取れる。すると、 $\lambda_{(-n)}$ に対するフーリエ係数は、

$$F_f^\circ(\lambda_{(-n)}) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_{(-n)}x} f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i(-n\Lambda)x} f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{in\Lambda x} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\lambda_n x} f(x) dx = (F_f^\circ(\lambda_n))^*$$

となる⁶。つまりフーリエ係数は、添字の正負に対応して複素共役になっているのである。

3.3 フーリエ級数導出のまとめ

フーリエ級数の導出の過程をまとめておこう。

前提条件（仮定）

- $f(x), g(x)$ らは「筋のよい周期 $2L$ の関数」
- $f(-L) = f(L), f(x+2L) = f(x)$ が成立する。



⁵フーリエ変換の場合、係数は逆変換の方にまわされ、内積の方にはつけない。フーリエ係数は内積の方に持って来ている。多分に歴史的なものであろう。この係数のつけ方にはいろいろ流派があるようで（フーリエ変換の場合には $1/\sqrt{2\pi}$ を平等に両方に割り振る形もあるようだ。でもまあ係数だから、あまり目くじらはたたないし、たてないでおおらかにいこう。

⁶被積分関数の複素共役を取ったものの積分は、積分の複素共役と等しい、として片付けている。自明のようにも思えるが証明が必要なかもしれない…。

エルミート理論の適用 (離散固有値)

- 作用素 $\hat{H} = -i \frac{d}{dx}$ に対する固有値方程式
- 周期性から $\Lambda 2L = 2\pi$
- 基底ベクトル $\left\{ \left| e^{i\lambda_n x} \right\rangle \mid \lambda_n = n\Lambda, \quad n \in \mathbf{Z} \right\}$
- 1周期分の内積: $\langle g(x) \mid f(x) \rangle_{2L} = \int_{-L}^L g^*(x) f(x) dx$



フーリエ級数

- フーリエ係数 (基底ベクトルに対する成分)
 - $F_f^\circ(\lambda_n) = \frac{1}{2L} \langle e^{i\lambda_n x} \mid f(x) \rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx$
 - $F_f^\circ(\lambda_{(-n)}) = \left(F_f^\circ(\lambda_n) \right)^*$
- フーリエ級数 (1周期分の逆変換), フーリエ展開 (基底ベクトルによるスペクトル分解)
 - $\mid f(x) \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| e^{i\lambda_n x} \right\rangle F_f^\circ(\lambda_n)$ (ベクトル表現)
 - $f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} F_f^\circ(\lambda_n)$ (関数表現)

第4章 周期関数のフーリエ変換

定義域を実数すべてとした周期関数のフーリエ変換. 言い換えれば, フーリエ級数のフーリエ変換.

4.1 δ 関数の再登場

フーリエ変換が連続的な基底ベクトル $|e^{i\lambda x}\rangle$ の各々¹ の成分を表すことにまず留意しよう. そして関数ベクトルはその基底ベクトルと成分の積分で表された. 一方, 周期関数は, 離散的な基底ベクトル $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ の和で級数表現され, その各々² の成分をフーリエ係数と呼んだ. これを連続的な基底ベクトルの世界で考えると, ベタッと並んでいる $|e^{i\lambda x}\rangle$ の中から $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ を取り出すことに他ならない. そこで δ 関数の出番が来るのである. いまからそれを見て行こう.

4.2 フーリエ変換

周期 $2L$ の関数をフーリエ級数に展開する. フーリエ係数は λ_n ($\lambda_n = n\Lambda, \Lambda 2L = 2\pi$) に依存するものであり, 1 周期分での積分であった. それを $F_f^\circ(\lambda_n)$ と記せば, フーリエ級数は

$$|f(x)\rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_f^\circ(\lambda_n) |e^{i\lambda_n x}\rangle$$
$$F_f^\circ(\lambda_n) = \frac{1}{2L} \langle e^{i\lambda_n x} | f(x) \rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx$$

とあらわせた.

さてこの $|f(x)\rangle$ をフーリエ変換しよう. フーリエ変換 $F_f(\lambda)$ は基底ベクトル $|e^{i\lambda x}\rangle$ との内積に他ならない. そして内積の線形性を持ちると,

$$F_f(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \langle e^{i\lambda x} | \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{i\lambda_n x}\rangle F_f^\circ(\lambda_n) \right) \rangle$$
$$= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle e^{i\lambda x} | e^{i\lambda_n x} \rangle F_f^\circ(\lambda_n)$$
$$= \sum_{n \in \mathbf{Z}} 2\pi \cdot \delta(\lambda - \lambda_n) \cdot F_f^\circ(\lambda_n)$$

となり, 周期関数のフーリエ変換が δ 関数の和で表されることが見て取れた.

¹連続的なものに対して「各々」というのはいささか恐れ多い.

²今回は離散的なので, 躊躇はない.

4.3 フーリエ逆変換

フーリエ逆変換を計算する。積分と和の順序交換を許せば³

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x} | f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |e^{i\lambda x}\rangle \left(2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_f^\circ(\lambda_n) \delta(\lambda - \lambda_n) \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_f^\circ(\lambda_n) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |e^{i\lambda x}\rangle \delta(\lambda - \lambda_n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_f^\circ(\lambda_n) |e^{i\lambda_n x}\rangle \end{aligned}$$

であり⁴，もとに戻る。この章の冒頭で

「ベタッと並んでいる $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ の中から $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ を取り出すことに他ならない。」

と述べた。この事実は δ 関数を持ちいて $|e^{i\lambda_n x}\rangle = |e^{i\lambda x}\rangle \delta(\lambda - \lambda_n)$ と表現される⁵。この逆変換の導出（最後の積分のところ）に、この事実があらわれている。

4.4 離散変数関数との関連

後述する付録 B.3(p.89) で離散変数関数の表し方をまとめた。また第 6 章で離散変数関数のフーリエ変換について議論をしている。ここで少し先取りして、周期関数のフーリエ変換の結果とそれらを対比しておく。

周期関数（周期 $2L$ ）のフーリエ変換は、 $\lambda_n = n\Lambda$, $\Lambda 2L = 2\pi$ として

$$F_f(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} | f(x)\rangle = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} F_f^\circ(\lambda_n) \cdot \delta(\lambda - \lambda_n)$$

と求めた。 $F_f(\lambda)$ を、変数 λ の空間での関数として眺めると、刻み幅が一定、つまりサンプリング間隔 Λ で離散変数化されている λ の関数である、ということをあらわしている。

ここでこの $F_f(\lambda)$ が、周期関数 $f(x)$ のフーリエ変換であることを一旦忘れて、ただ単にサンプリングで離散変数化された関数であるということだけに目を向けよう。第 6 章『離散変数関数のフーリエ変換』で述べている事柄であるが、サンプリングで離散変数化された関数のフーリエ変換は、周期関数となる。したがって、 $F_f(\lambda)$ の λ 空間でのフーリエ変換を考えれば、そのフーリエ変換は周期関数になることになる。さらに、フーリエ変換の対称性⁶ から、 $F_f(\lambda)$ のフーリエ変換は $f(x)$ である。ゆえに $f(x)$ が周期関数であり、その周期も $2\pi/\Lambda = 2L$ となることが、サンプリングで離散変数化された $F_f(\lambda)$ から始めた議論でも導き出されるのである。

³6, 7 で述べるように、離散変数関数のあつかいにおいてはこの積分と和の順序交換が天真爛漫に行われる。筋の良い関数を扱っているのだというところで納得しておこう。

⁴この最後はすこし横着をして、関数ベクトルにそのまま δ 関数を適用してしまった。多少精密に記しておこう。まず、

$$|g(x)\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |e^{i\lambda x}\rangle \delta(\lambda - \lambda_n)$$

とおき、この関数表現を計算すると

$$\langle x | g(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \langle x | e^{i\lambda x}\rangle \delta(\lambda - \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda x} \delta(\lambda - \lambda_n) = e^{i\lambda_n x}$$

で、これは $|e^{i\lambda_n x}\rangle$ の関数表現に他ならない。よってこの「横着」が許されることになる。

⁵後述する付録 B.3(p.89) を参照されたい。

⁶第 5 章『フーリエ変換の対称性』参照。

第5章 フーリエ変換の対称性

フーリエ変換とフーリエ逆変換の対称性に対する考察。フーリエ変換を独立に考えることから始まる。

関数からそのフーリエ変換までの過程を再度見直してみよう。いままでの理路は概略、

- 関数の変数は実数 x .
- ベクトルと関数を表現 $|x\rangle$ で対応付ける： $\langle x|f(x)\rangle = f(x)$.
- エルミート理論を適用。ベクトルへの作用素 $-id/d\hat{x}$ を用いて固有値方程式から、 $|e^{i\lambda x}\rangle$ が基底ベクトルとなることを導出。
- 表現 $|e^{i\lambda x}\rangle$ を用いてスペクトル分解式（フーリエ逆変換）をえる。
- $|e^{i\lambda x}\rangle$ のスペクトル $F_f(\lambda) = \langle e^{i\lambda x}|f(x)\rangle$ をフーリエ変換と名付ける。

というものであり、これらから関数間の関係として

$$f(x) \longleftrightarrow F_f(\lambda)$$

という対応関係を導いてきた。

さてここで、このフーリエ変換 $F_f(\lambda)$ を「関数 $f(x)$ から導かれた物」であるということを一旦忘れて、単なる λ の関数であると考えてみよう。ここで、上に述べた理路において、 x を λ 、 λ を u 、と変えても議論の構造はまったく変わらない。そこで、 $F(\lambda)$ のフーリエ変換を $G_F(u)$ とすれば、

$$\begin{aligned} & -i \frac{d}{d\lambda} \text{ が作用素,} \\ & \langle \lambda | F(\lambda) \rangle = F(\lambda), \\ & |e^{iu\lambda}\rangle \text{ が基底ベクトル,} \\ & G_F(u) = \langle e^{iu\lambda} | F(\lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\lambda} F(\lambda) d\lambda \text{ がフーリエ変換,} \\ & |F(\lambda)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iu\lambda}\rangle G_F(u) du \text{ がスペクトル分解式 (フーリエ逆変換)} \end{aligned}$$

となり、 λ の世界でも、 x の世界でのフーリエ変換と同様な諸定理、諸結果を得ることができる。基準となる変数が違うだけである。

そこで再び戻って、 $F(\lambda)$ が $f(x)$ のフーリエ変換であるとしよう。 $G_{F_f}(u)$ を計算すると

$$\begin{aligned} G_{F_f}(u) &= \left\langle e^{iu\lambda} \middle| F_f(\lambda) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\lambda} F_f(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-iu\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\lambda x} f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda dx e^{-iu\lambda} e^{-i\lambda x} f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-i(u+x)\lambda} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) 2\pi \delta(x+u) \\ &= 2\pi f(-u) \end{aligned}$$

となり、もとの f があらわれる。 u を x にすれば、

$$f(-x) = \frac{1}{2\pi} G_{F_f}(x)$$

であり、 $x := -x$ とすれば

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} G_{F_f}(-x)$$

である。これは

$f(x)$ のフーリエ変換 $F_f(\lambda)$ の、 λ の世界でのフーリエ変換は $f(x)$ にもどる

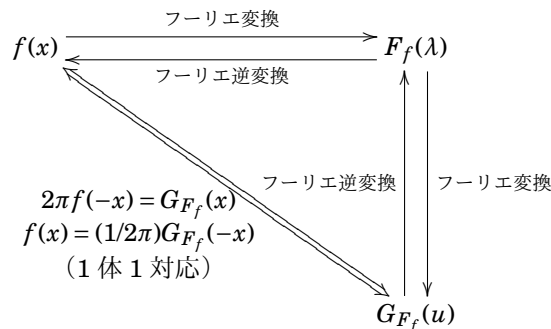
と言う事実を示している。すなわち、「逆変換」に他ならない。

念のため $F_f(\lambda)$ を G_F を経由して計算すると、

$$\begin{aligned} F_f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} G_{F_f}(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} 2\pi f(-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} f(-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) du \quad (u = -x, \quad du = -dx) \end{aligned}$$

となり、 $f(x)$ のフーリエ変換そのものであると確認できる。

以上がフーリエ変換をとりまく「対称性」である（係数や符号をみると完全に対称的とはいえないけれども）。関連図としてまとめておこう。



第6章 離散変数関数のフーリエ変換

通常関数の場合、定義域には連続量 x を用いるのが常套で、それをもとに微分や積分などの解析的演算が実現されてくる。一方、現実になにかを測定する場合——5km ごとのラップタイム、1日の降水量、1秒単位での電圧の変化、その他もろもろ——を考えると、「連続量ごと」¹に測定値を得るのではなく、「とびとびの値ごと」に測定値を得ることがほとんどである。これを、定義域が離散化されている、関数の変数が離散化されている、などと呼ぶ。そしてそのとびとびの値の幅を狭めたり、あるいは、なにかの近似をおこなって、連続量変数の関数に外挿することもしばしば行われる。こうすることによって解析的な扱いが可能になる。

変数が離散化されている関数を「離散変数関数」と呼ぶことにしよう。そしてこの離散変数関数のフーリエ変換を見ていこう。方法の骨子は、 δ 関数を用いて連続変数関数化するところにある。さらに変数の離散化がランダムではなく、一定間隔をもって離散化される（サンプリング）時のフーリエ変換が周期性をもつことをみていく。

6.1 一般的な離散変数関数

6.1.1 離散変数関数の連続変数化

変数が離散化されているのだから、それはひとつふたつと数え上げることができる。したがって、 j を整数として区別のための指標とし、点 x_j での値を $f(x_j)$ としよう。これで離散変数関数 $f(x_j)$ が定まる。

では x_j でないときの値はいくつなのか？いまの段階ではその場合にたいする情報がなにもない。なにもないので、ここで、連続変数関数化を睨んで、次のことを要請しよう：

x_j 以外の時の関数値は 0 である。

この要請のもと、離散変数関数 $f(x_j)$ を、まず場合分けをもとに連続変数化してみよう。連続変数化した関数を $f_d(x)$ とすれば

$$f_d(x) = \begin{cases} f(x_j) & \text{for all } j \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と書きあらわせる。ただ、この表記方法は、 x での積分という解析的な扱いには不都合である。なぜならば、連続量（実数）のなかで特定の点 x_j でしか値をもたず（幅がない）、それ以外の所でははいたるところ 0 なので、 x での積分は 0 にならざるをえないからである。

δ 関数の力を借りよう。つまり離散変数関数の連続変数関数化を次のように表すことにするのである²：

$$f_d(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j). \quad (6.1.1)$$

¹連続な量に対して「ごと」とつけるこの言い方はおかしいけれども、ニュアンスは伝わるのではあるまいか？

²付録 B.3(p.89) にここで用いる離散変数関数の表し方をまとめた。

これで、 $x \neq x_j$ の時は $f_d(x)$ が 0 であることも表現できている。

さてこれからフーリエ変換を考えていくにあたっては、そのための条件、つまり、 $f_d(x)$ の筋がよく、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_d(x) = 0$ が成立する必要がある。変数が離散化されているので、直感的には連続性や微分可能の条件がすなおに満たされるようには思えない。それを補ってくれるものが δ 関数であると考えてよいだろう。ついては、フーリエ変換のための条件は整っているものとして、話をすすめていく。

6.1.2 スペクトル分解，フーリエ変換

$f_d(x)$ は連続変数の関数であるので通常関数と同等に扱ってよいはずである。それを受けて、連続固有値 λ による表現 $|e^{i\lambda x}\rangle$ を用いてスペクトル分解してみよう。第 2 章『フーリエ変換』でみたように、スペクトル分解（フーリエ逆変換）は、

$$|f_d(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f_d(x)\rangle$$

となる。そしてフーリエ変換は基底ベクトルの成分（内積）であって、

$$F_{f_d}(\lambda) = \langle e^{i\lambda x} | f_d(x)\rangle$$

となるものであった。ここまでは理論どおり。

ここで、離散変数関数 $f_d(x)$ の具体的な形 (6.1.1) を適用してその特徴をみていこう。フーリエ変換を計算すれば、

$$\begin{aligned} F_{f_d}(\lambda) &= \left\langle e^{i\lambda x} \left| \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j) \right. \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j) \right\} dx \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x_j) \delta(x - x_j) dx \right\} \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \end{aligned}$$

となる。したがってスペクトル分解の具体的な形も

$$|f_d(x)\rangle = \left| \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle F_{f_d}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \right\} d\lambda.$$

となる。

念のために、フーリエ逆変換でもともにもどることを、関数表現でも確認をしておこう。

$$\begin{aligned} f_d(x) = \langle x | f_d(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | e^{i\lambda x}\rangle \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \right\} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} e^{-i\lambda x_j} d\lambda \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-x_j)} d\lambda \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) 2\pi \delta(x - x_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j). \end{aligned}$$

したがって、点 x_k に焦点をあてると、

$$f_d(x_k) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x_k - x_j)$$

である。そもそもこの離散変数関数の定義において、 $f_d(x_k) = f(x_k)$ であった。それゆえ、

$$f_d(x_k) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x_k - x_j) = f(x_k)$$

が成立することになる。若干奇妙であるが、これは、 δ 関数の象徴的表現

$$x_k \neq x_j \text{ の時には } \delta(x_k - x_j) = 0$$

を援用して、いわばクロネッカーの δ 的操作をみとめてしまうということに落ち着く³。

ひとつ留意点を。ここまでの計算でとくに積分の計算にあたっては、天真爛漫になにも躊躇することなく、積分 (\int) と和 (\sum) の順序を入れ換えている。これは必ずしも一般的に成り立つ話ではないが、フーリエ解析では頻繁にこの手の計算を実行する。「筋のよい関数を扱う」というところにその天真爛漫さを託している。

6.2 サンプルング離散変数関数

往々にして離散変数の間隔、つまり、離散化の刻み幅は一定である。一定の刻みの幅で離散化することをサンプルングと言うことにしよう。等間隔での離散化である。いま、その刻み幅を τ とする。もちろんこれは定数。 j を整数として、 $x=0$ (原点) から τj ぶん刻まれたものを x_j とし、正負両方 (過去と未来?) を扱うようにする。すなわち、

$$x_j = \tau j \quad (j \in \mathbf{Z})$$

であり、刻み幅の一定性は

$$x_{j+1} - x_j = \tau$$

と表現される。この刻み幅のことを「サンプルング間隔」「サンプルング周期」と言ったりもする。

6.2.1 サンプルング離散変数関数のフーリエ変換の特徴 (周期性)

サンプルング間隔 τ の離散変数関数 (「サンプルング離散変数関数」と略す) を連続変数関数化したものを

$$f_{sd}(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j)$$

としよう。まずこれは離散変数関数の連続変数関数化なので、そのスペクトル分解、フーリエ変換はかわらず、

$$\begin{aligned} |f_{sd}(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x} | f_{sd}(x)\rangle d\lambda \\ F_{f_{sd}}(\lambda) &:= \langle e^{i\lambda x} | f_{sd}(x)\rangle = \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \end{aligned}$$

³表現 $|x\rangle$ での計算もしておこう。 $|x_k\rangle$ 方向の成分を求めれば、

$$\begin{aligned} \langle x_k | f_d(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_k | e^{i\lambda x}\rangle d\lambda \langle e^{i\lambda x} | f_d(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} F_{f_d}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x_k - x_j)} d\lambda = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x_k - x_j) = f(x_k) \end{aligned}$$

となる。

である。ここでサンプリング間隔が τ である事柄から、フーリエ変換において $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi/\tau$ とずらしてみると、

$$\begin{aligned} F_{f_{sd}}(\lambda + 2\pi/\tau) &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i(\lambda + 2\pi/\tau)x_j} f(x_j) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} e^{-i2\pi \frac{x_j}{\tau}} f(x_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} e^{-i2\pi j} f(x_j) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \\ &= F_{f_{sd}}(\lambda). \end{aligned}$$

となる。 $F_{f_{sd}}(\lambda)$ は周期 $2\pi/\tau$ という事実が確認された。つまり、サンプリング間隔 τ のサンプリング離散変数関数のフーリエ変換は、周期 $2\pi/\tau$ で周期的になるのである。この事実は大きい⁴。

6.2.2 スペクトル分解の積分をフーリエ変換の1周期分だけにすると

スペクトル分解（フーリエ逆変換）での積分は $\int_{-\infty}^{\infty}$ であった。そしていまその積分に含まれるフーリエ変換 $F_{f_{sd}}(\lambda)$ が周期関数であることがわかった。周期関数であるということは同じ振る舞いが繰り返されるということであるから、積分において、周期関数 $F_{f_{sd}}(\lambda)$ の1周期分の積分が無制限個加算されてしまうことになる。なんとなく不安が残る（この節の最後に述べるが、不安は δ 関数が解消してくれる）。

では、1周期分だけの積分にしてみるとどうだろうか？それを確認してみよう。関数表現では、スペクトル分解（フーリエ逆変換）は

$$f_{sd}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda$$

である。さらに、サンプリング離散変数関数のフーリエ変換の周期は $2\pi/\tau$ であったから、この式で積分範囲を $-\pi/\tau \rightarrow \pi/\tau$ の1周期に縮小してみる。さらに加えて、サンプリング点 x_k にのみ焦点をあてる。その積分を $I(x_k)$ とすると

$$\begin{aligned} I(x_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x_k} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \right\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} f(x_j) e^{i\lambda x_k} e^{-i\lambda x_j} d\lambda \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda(x_k - x_j)} d\lambda \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで x_k, x_j がサンプリング点であるという事実から、 $x_k - x_j = \tau k - \tau j = \tau(k - j)$ であるので、

$$I(x_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda \tau(k-j)} d\lambda \right\}$$

と変形できる。ここに現れる積分を計算すると⁵、

$$\int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda \tau(k-j)} d\lambda = \frac{2\pi}{\tau} \delta(k, j)$$

とともまり、結局

$$I(x_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda \tau(k-j)} d\lambda \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \frac{2\pi}{\tau} \delta(k, j) \right\} = \frac{1}{\tau} f(x_k)$$

⁴対象としていたもとの関数 $f_{sd}(x)$ の周期性とはまったく関係はない。変数が周期的離散化（サンプリング）されていればそれだけでこれが成立する。 $f_{sd}(x)$ それら自身が周期的でもあった場合には、第7章の離散フーリエ変換となるのである。

⁵付録 A.1(p.82)での $L = \pi/\tau$ の場合である。

となる。離散変数関数の定義から $f(x_k) = f_{sd}(x_k)$ であるので、結果

$$f_{sd}(x_k) = f(x_k) = \tau I(x_k) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda$$

でもある⁶。つまり、サンプリング点に注目すると、スペクトル分解（フーリエ逆変換）の積分範囲をフーリエ変換の1周期分に縮小し、それにサンプリング間隔をかけたものが $f(x_k)$ となることが見て取れたのである。

今一度整理してみよう。サンプリング離散変数関数 $f_{sd}(x)$ のスペクトル分解において、

$$f_{sd}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda \quad (6.2.1)$$

$$f_{sd}(x_k) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda \quad (6.2.2)$$

ともまとめた。ここで (6.2.1) において $x = x_k$ の場合を考えると、すなおに行けば、

$$f_{sd}(x_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda$$

であり、これが (6.2.2) と等しくならねばならない。つまり、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda$$

となるのである。一見したところ意外な事実と言えまいか？ からくりは δ 関数にある。一般的な離散変数関数のところと同様にフーリエ変換を用いて計算をすすめると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x_k - x_j) = f(x_k) = f_{sd}(x_k)$$

となる。積分範囲が $\int_{-\infty}^{\infty}$ である場合には δ 関数が現れてきて、 $f_{sd}(x_k)$ がもとまる。フーリエ変換の1周期分の積分にすれば、実際に積分計算ができて、 $f_{sd}(x_k)$ がもとまる。サンプリング離散変数関数のおもしろい特徴である。

⁶ ここまでの話はサンプリング点に焦点をあてて計算を進めてきたが、通常の変数 x でも実施できるということを備忘録として記しておこう。クロネッカーの δ を導入するところが少なからずトリッキーであるが、こんなやり方もあるということで、まず、

$$\begin{aligned} I(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j) \right\} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} f(x_j) e^{i\lambda x} e^{-i\lambda x_j} d\lambda \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda(x-x_j)} d\lambda \right\} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \frac{2\pi}{\tau} \right\} & (x = x_j), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \frac{2 \sin \frac{\pi}{\tau}(x-x_j)}{x-x_j} \right\} & (otherwise) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。ここで最後の場合分けにおいて、 $x = x_j$ という条件を $\delta(x, x_j)$ というクロネッカーの δ に置き換える。これが同値なことはあきららかである。さらにこう書くことによって、 x の関数という意味合いが与えられる。したがって、

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \frac{2\pi}{\tau} \delta(x, x_j) \right\} & (x = x_j), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \frac{2 \sin \frac{\pi}{\tau}(x-x_j)}{x-x_j} \right\} & (otherwise) \end{cases}$$

となる。ここで $I(x_k)$ を考えると、 $x_k \neq x_j$ の場合（「otherwise」の場合）、 $x_k - x_j = \tau(k-j)$ から \sin 関数の変数は π の整数倍になり、結果0となる。よって

$$I(x_k) = \frac{1}{\tau} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \left\{ f(x_j) \frac{2\pi}{\tau} \delta(x_k, x_j) \right\} = \frac{1}{\tau} f(x_k).$$

6.2.3 フーリエ変換の対称性から

フーリエ変換 $F_{f_{sd}}(\lambda)$ が周期 $2L := 2\pi/\tau$ という事柄から始めてみよう。変数を λ とする空間での $F_{f_{sd}}(\lambda)$ のフーリエ変換 $G_{F_{f_{sd}}}(u)$ を考えてみる。まず周期関数であることから、そのフーリエ係数 $G_{F_{f_{sd}}}^\circ(u_n)$ は

$$G_{F_{f_{sd}}}^\circ(u_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-iu_n\lambda} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda \quad (\text{where } u_n := n\tau)$$

であり、これを持ちいてフーリエ変換は

$$G_{F_{f_{sd}}}(u) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} G_{F_{f_{sd}}}^\circ(u_n) \delta(u - u_n)$$

となる。さて、フーリエ変換の対称性から、 $f_{sd}(x) = (1/2\pi) G_{F_{f_{sd}}}(-x)$ が成り立った。したがって、

$$\begin{aligned} f_{sd}(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} G_{F_{f_{sd}}}^\circ(-x_n) \delta(-x + x_n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{ix_n\lambda} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda \right\} \delta(-x + x_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{ix_n\lambda} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda \right\} \delta(x - x_n) \quad (\delta \text{ 関数が偶関数であることを利用)} \end{aligned}$$

となる。一方 $f_{sd}(x)$ は、

$$f_{sd}(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x_n) \delta(x - x_n)$$

であった。両式を見比べて、周期を $2L = 2\pi/\tau$ と元に戻せば、前節のフーリエ変換の1周期分の積分でもとめたものと同様の結果

$$f(x_n) = f_{sd}(x_n) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{ix_n\lambda} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda$$

を得る。

6.3 まとめ

この章をまとめよう。

離散変数関数の表現

$$\bullet f_d(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j)$$



フーリエ変換

- 固有値 λ は連続
- フーリエ変換（基底ベクトルに対する成分，スペクトル）

$$- F_{f_d}(\lambda) = \left\langle e^{i\lambda x} \left| \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j) \right. \right\rangle = \sum_{j \in \mathbf{Z}} e^{-i\lambda x_j} f(x_j)$$

- 基底ベクトルによるスペクトル分解（フーリエ逆変換，フーリエ展開）

$$- |f_d(x)\rangle = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}\rangle F_{f_d}(\lambda) d\lambda \iff f_d(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F_{f_d}(\lambda) d\lambda$$

- 積分と和の順序交換はいつでも可能な「筋の良い関数」を扱っていることに留意

サンプリング離散変数関数の表現

- サンプリングの表現
 - サンプリング間隔 τ , $x_{j+1} - x_j = \tau$, $x_j = \tau j$

- 関数の表現は同じ

$$- f_{sd}(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j)$$



フーリエ変換の特徴

- フーリエ変換，基底ベクトルによるスペクトル分解（フーリエ逆変換，フーリエ展開）はかわらず
- フーリエ変換は周期的（周期 $2\pi/\tau$ ）

$$- F_{f_{sd}}(\lambda) = F_{f_{sd}}(\lambda + 2\pi/\tau)$$

- スペクトル分解の積分をフーリエ変換 1 周期分にすると

$$- f(x_k) = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\pi/\tau}^{\pi/\tau} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x_k} F_{f_{sd}}(\lambda) d\lambda$$

第7章 離散フーリエ変換

関数 $f(x)$ のフーリエ変換から始めて、フーリエ級数（1周期分のフーリエ変換）、周期関数のフーリエ変換、離散変数関数のフーリエ変換をみてきた。この章では、サンプリング離散変数関数に「周期的」という条件を課し、そのフーリエ変換を考える。結果このフーリエ変換が計算機にとって扱いやすい形式のものとなる。

7.1 周期的なサンプリング離散変数関数

7.1.1 1周期内のサンプリング点

サンプリング間隔 τ で離散化された変数 x_j によるサンプリング離散変数関数が、周期的である場合を考えよう。考える周期は $2L$ であるとする。離散フーリエ変換においては、その周期内のサンプリング点の個数が重要になる。1周期内のサンプリング点の個数を N とすると、離散変数はサンプリング間隔 τ で等間隔に並んでいるので、簡単な計算により¹,

$$N = \frac{2L}{\tau}$$

である。

ここで、この周期的なサンプリング離散変数関数を $f_{2Lsd}(x)$ とあらわすことにしよう。周期的であるという事実は

$$\begin{aligned}f_{2Lsd}(-L) &= f_{2Lsd}(L) \\f_{2Lsd}(x) &= f_{2Lsd}(x + 2L) \\f_{2Lsd}(x) &= f_{2Lsd}(x + N\tau) \\f_{2Lsd}(x_j) &= f_{2Lsd}(x_{j+N})\end{aligned}$$

などのようにあらわせる。ここで、 N 個のサンプリング点を x_0, x_1, \dots, x_{N-1} とし、このサンプリング点が $-L \leq x \leq L$ の1周期に存在しているものとしよう。

7.2 フーリエ級数によるスペクトル分解

$f_{2Lsd}(x)$ はそもそもサンプリング離散変数関数であったので、それは、

$$f_{2Lsd}(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j), \quad x_j = \tau(j \in \mathbf{Z})$$

¹自分でも一度使ってみたかったフレーズ。文字通り、この計算は容易である。

とあらわせるものであった。次に、 $f_{2Lsd}(x)$ は周期 $2L$ の関数であるとした。したがって 1 周期分に定義域を絞ると、

$$f_{2Lsd}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\delta(x-x_j)$$

となる。周期関数という性質から導かれる $f_{2Lsd}(x_j) = f_{2Lsd}(x_{j+N})$ を用いて外延すれば全域に拡張できる。さらに加えて、第 3 章『フーリエ級数 (1 周期分のフーリエ変換)』の理路が適用できる。つまり、固有値は離散的であり、離散固有値に対応する基底ベクトルでスペクトル分解が実行できてそれは

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| e^{i\lambda_n x} \right\rangle \left\langle e^{i\lambda_n x} \left| f(x) \right\rangle_{2L} \quad (\text{where } \lambda_n = n\Lambda, \Lambda 2L = 2\pi)$$

であった。これをこの周期的なサンプリング離散変数関数に適用していこう。

1 周期分のフーリエ変換 (フーリエ係数) $F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n)$ は、

$$\begin{aligned} F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n) &= \frac{1}{2L} \left\langle e^{i\lambda_n x} \left| f_{2Lsd}(x) \right\rangle_{2L} \right\rangle = \frac{1}{2L} \left\langle e^{i\lambda_n x} \left| \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\delta(x-x_j) \right\rangle_{2L} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\delta(x-x_j) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x_j)\delta(x-x_j) dx \right\} \end{aligned}$$

と変形される。ここで δ 関数と積分範囲と和に注目しよう。積分範囲は 1 周期分の $-L \rightarrow L$ なので、そこに含まれる離散変数 x_j は先に決めた N 個の x_0, x_1, \dots, x_{N-1} である。よってこの N 個の離散変数にたいしては δ 関数が働き積分が値を持つ。ゆえに、

$$F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n) = \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j)$$

と求まる。スペクトル分解の結果をまとめると、次のとおり：

$$\begin{aligned} |f_{2Lsd}(x)\rangle &= \left| \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j)\delta(x-x_j) \right\rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| e^{i\lambda_n x} \right\rangle \left\langle e^{i\lambda_n x} \left| f(x) \right\rangle_{2L} \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| e^{i\lambda_n x} \right\rangle F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left| e^{i\lambda_n x} \right\rangle \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j) \right\}. \end{aligned}$$

7.2.1 フーリエ係数の周期性

$f_{2Lsd}(x)$ はサンプリング離散変数関数であった。第 6 章『離散変数のフーリエ変換』で見たように、そのフーリエ変換は周期的になるのであった。それと同様に、フーリエ係数 $F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n)$ も周期的になるだろうか？ $x_j = \tau j$ を利用して計算してみると、

$$\begin{aligned} F_{f_{2Lsd}}^\circ\left(\lambda_n + \frac{2\pi}{\tau}\right) &= \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i(\lambda_n + \frac{2\pi}{\tau})x_j} f(x_j) = \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} e^{-i\frac{2\pi}{\tau}x_j} f(x_j) \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} e^{-i2\pi j} f(x_j) = \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j) \\ &= F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n) \end{aligned}$$

となり，フーリエ係数も周期 $2\pi/\tau$ となることがわかる．

では，この周期内に λ_n はいくつあるか？ $\lambda_n = n\Lambda$ であった．ゆえに $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \Lambda$ である．これから分かるように， $F_{f_{2Lsd}}^\circ$ もサンプリング間隔 Λ のサンプリング離散変数関数なのである．そして周期が $2\pi/\tau$ なのであるから，その周期内のサンプリング点の個数は， $\Lambda = 2\pi/2L$ を思い出して

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{1}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{2L}{2\pi} = \frac{2L}{\tau} = N$$

となる． f_{2Lsd} 一周期分のサンプリング点の個数と一致する．特徴的で面白い事実である．まとめておこう．

$$\begin{aligned} f_{2Lsd}(x) & : \text{周期 } 2L \quad \text{サンプリング間隔 } \tau = 2L/N \quad \text{1 周期内のサンプリング個数 } N \\ F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n) & : \text{周期 } 2\pi/\tau \quad \text{サンプリング間隔 } \Lambda = 2\pi/2L \quad \text{1 周期内のサンプリング個数 } N \end{aligned}$$

7.2.2 スペクトル分解の和をフーリエ係数 1 周期分だけにすると

周期的なサンプリング離散変数関数のスペクトル分解式がもたらした．さらにフーリエ係数が周期的である事もわかった．ここからフーリエ係数 1 周期分のスペクトル分解式を導出しよう．以下具体的な演算を事項するので関数表現で記述してゆく．

スペクトル分解式は

$$f_{2Lsd}(x) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f(x_j) \delta(x - x_j) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} F_f^\circ(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\lambda_n x} \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j) \right\}$$

であった．サンプリング離散変数関数のフーリエ変換の理路と同様に，サンプリング点 x_k に焦点をあて，無限和でなくフーリエ係数の 1 周期分だけの和 $I(x_k)$ を計算する．フーリエ係数 1 周期分のサンプリング点を $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ とすれば，和の範囲は $\sum_{n=0}^{N-1}$ に絞られる．計算を実行すると，

$$\begin{aligned} I(x_k) & := \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_k} F_{f_{2Lsd}}^\circ(\lambda_n) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_k} \left\{ \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j) \right\} \\ & = \frac{1}{2L} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_k} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j) \\ & = \frac{1}{2L} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_n (x_k - x_j)} f(x_j) \end{aligned}$$

となる．ここで，指数関数の肩を整理する． $x_j = \tau j$ だから

$$I(x_k) = \frac{1}{2L} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\lambda_n \tau (k-j)} f(x_j)$$

$\lambda_n = n\Lambda = n \cdot 2\pi/2L$ ， $\tau = 2L/N$ だから

$$I(x_k) = \frac{1}{2L} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} (k-j)n} f(x_j)$$

そして和の順番を入れ替えて整理すると

$$I(x_k) = \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ f(x_j) \sum_{n=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} (k-j)n} \right\}.$$

ここで,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(k-j)n} = N\delta(j, k)$$

であるから², 結果

$$I(x_k) = \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) N\delta(j, k) = \frac{N}{2L} f(x_k)$$

となる. $f_{2Lsd}(x_k) = f(x_k)$ を用いれば

$$f_{2Lsd}(x_k) = \frac{2L}{N} I(x_k) = \frac{2L}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_k} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_n)$$

となり, サンプルング点での関数値がフーリエ係数から求まった.

7.2.3 フーリエ変換の対称性から

サンプルング離散変数関数の時と同様に, フーリエ変換の対称性からの導出もやってみよう. まず $F_{f_{2Lsd}}(\lambda)$ が周期的なサンプルング離散変数関数であるという事柄から始める. $F_{f_{2Lsd}}(\lambda)$ のフーリエ係数は, 周期を $2M := 2\pi/\tau$ と置いて,

$$G_{F_{f_{2Lsd}}}^{\circ}(u_n) = \frac{1}{2M} \int_{-M}^M e^{-iu_n\lambda} F_{f_{2Lsd}}(\lambda) d\lambda \quad (\text{where } u_n := n\tau)$$

であり, フーリエ変換は

$$G_{F_{f_{2Lsd}}}(u) = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} G_{F_{f_{2Lsd}}}^{\circ}(u_n) \delta(u - u_n)$$

である. そして対称性から $f_{2Lsd}(x) = (1/2\pi) G_{F_{f_{2Lsd}}}(-x)$ が成り立った. したがって,

$$f_{2Lsd}(x) = \frac{1}{2\pi} G_{F_{f_{2Lsd}}}(-x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} G_{F_{f_{2Lsd}}}^{\circ}(-x_n) \delta(-x + x_n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} G_{F_{f_{2Lsd}}}^{\circ}(-x_n) \delta(x - x_n)$$

一方,

$$f_{2Lsd}(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(x_n) \delta(x - x_n)$$

であるから,

$$f(x_n) = G_{F_{f_{2Lsd}}}^{\circ}(-x_n) = \frac{1}{2M} \int_{-M}^M e^{ix_n\lambda} F_{f_{2Lsd}}(\lambda) d\lambda$$

となる. さてここで $F_{f_{2Lsd}}(\lambda)$ に戻ろう. これは周期 $2L$ の関数 $f_{2Lsd}(x)$ のフーリエ変換であったから,

$$F_{f_{2Lsd}}(\lambda) = 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_k) \delta(\lambda - \lambda_k)$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{1}{2M} \int_{-M}^M e^{ix_n\lambda} F_{f_{2Lsd}}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2M} \int_{-M}^M e^{ix_n\lambda} \left\{ 2\pi \sum_{k \in \mathbf{Z}} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_k) \delta(\lambda - \lambda_k) \right\} d\lambda \\ &= \frac{2\pi}{2M} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{-M}^M e^{ix_n\lambda} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_k) \delta(\lambda - \lambda_k) d\lambda \end{aligned}$$

²付録 A.2 (p.83) の証明を参照. 少々ややこしい.

となる。積分範囲の中のサンプリング点の個数は N であるから無限和が絞られること、 $2M = 2\pi/\tau$ であり、 $\tau = 2L/N$ であることを反映させれば、

$$f(x_n) = \frac{2L}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{ix_n \lambda} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_k)$$

となり、同様の結果を（当然であるが）得る。

7.3 離散フーリエ変換

周期的なサンプリング離散変数関数 $f_{2Lsd}(x)$ に対して、そのフーリエ変換 $F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda)$ も周期的なサンプリング離散変数関数になった。そしてどちらも 1 周期内のサンプリング点の個数は等しいことが見て取れた。そのサンプリング点の個数を N とし、サフィックスを整理してスペクトル分解（フーリエ逆変換）とフーリエ変換の式をまとめてみると、

$$f_{2Lsd}(x_j) = \frac{2L}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_j} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_n)$$

$$F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_n) = \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j)$$

となる。ここで、パラメタを

$$F_{f_{2Lsd}}^{\triangleright}(\lambda_n) := \tau F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_n) = \frac{2L}{N} F_{f_{2Lsd}}^{\circ}(\lambda_n)$$

と調節すれば

$$f_{2Lsd}(x_j) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_j} F_{f_{2Lsd}}^{\triangleright}(\lambda_n)$$

$$F_{f_{2Lsd}}^{\triangleright}(\lambda_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j)$$

という形式も成り立つ（こちらの方がよく使われるようだ）。これらをまとめて「離散フーリエ変換」と呼ぶようである。そして見てわかるように、この形式は行列ととても相性がよい。また、計算機にとっては行列は優しいものである。プログラミングもやりやすい。離散フーリエ変換を行列をもちいてあらわしてみよう。

7.3.1 行列による表現

煩雑を避けるために、離散フーリエ変換のペアの式の添え字などを次のように簡略化する。

$$f(x_j) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_j} F(\lambda_n) \tag{7.3.1}$$

$$F(\lambda_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j). \tag{7.3.2}$$

まず, (7.3.2) の $F(\lambda_n)$ から書き出そう. これは「ぐっと式をにらむ」ことから容易に求まる:

$$\begin{pmatrix} F(\lambda_0) \\ F(\lambda_1) \\ F(\lambda_2) \\ F(\lambda_3) \\ \vdots \\ F(\lambda_{N-1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} e^{-i\lambda_0 x_0} & e^{-i\lambda_0 x_1} & \dots & e^{-i\lambda_0 x_{N-1}} \\ e^{-i\lambda_1 x_0} & e^{-i\lambda_1 x_1} & \dots & e^{-i\lambda_1 x_{N-1}} \\ e^{-i\lambda_2 x_0} & e^{-i\lambda_2 x_1} & \dots & e^{-i\lambda_2 x_{N-1}} \\ e^{-i\lambda_3 x_0} & e^{-i\lambda_3 x_1} & \dots & e^{-i\lambda_3 x_{N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-i\lambda_{N-1} x_0} & e^{-i\lambda_{N-1} x_1} & \dots & e^{-i\lambda_{N-1} x_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

これはこれで対称性もあり美しいが, もう少し行列の中を具体的にしてみよう. $x_j = \tau j$ であり, $\lambda_k = (2\pi/(N\tau)) \cdot k$ であったので, $\lambda_k x_j = (2\pi/N)kj$ である. それを利用すると,

$$\begin{pmatrix} F(\lambda_0) \\ F(\lambda_1) \\ F(\lambda_2) \\ F(\lambda_3) \\ \vdots \\ F(\lambda_{N-1}) \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot (N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

列ベクトルのほうも, 関数的意味合いを捨象して簡略化し, 次のように書くこともある.

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot (N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot 1} & e^{-i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot 2} & \dots & e^{-i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

つぎに, (7.3.1) の $f(x_j)$ を書き出そう.

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_0 x_0} & e^{i\lambda_1 x_0} & e^{i\lambda_2 x_0} & \dots & e^{i\lambda_{N-1} x_0} \\ e^{i\lambda_0 x_1} & e^{i\lambda_1 x_1} & e^{i\lambda_2 x_1} & \dots & e^{i\lambda_{N-1} x_1} \\ e^{i\lambda_0 x_2} & e^{i\lambda_1 x_2} & e^{i\lambda_2 x_2} & \dots & e^{i\lambda_{N-1} x_2} \\ e^{i\lambda_0 x_3} & e^{i\lambda_1 x_3} & e^{i\lambda_2 x_3} & \dots & e^{i\lambda_{N-1} x_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\lambda_0 x_{N-1}} & e^{i\lambda_1 x_{N-1}} & e^{i\lambda_2 x_{N-1}} & \dots & e^{i\lambda_{N-1} x_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\lambda_0) \\ F(\lambda_1) \\ F(\lambda_2) \\ F(\lambda_3) \\ \vdots \\ F(\lambda_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot 1} & e^{i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot 2} & \dots & e^{i(2\pi/N) \cdot 1 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot 1} & e^{i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot 2} & \dots & e^{i(2\pi/N) \cdot 2 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot 1} & e^{i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot 2} & \dots & e^{i(2\pi/N) \cdot 3 \cdot (N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot 1} & e^{i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot 2} & \dots & e^{i(2\pi/N) \cdot (N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\lambda_0) \\ F(\lambda_1) \\ F(\lambda_2) \\ F(\lambda_3) \\ \vdots \\ F(\lambda_{N-1}) \end{pmatrix}$$

であり，関数系を簡略化すれば，

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{i(2\pi/N)\cdot 1\cdot 1} & e^{i(2\pi/N)\cdot 1\cdot 2} & \cdots & e^{i(2\pi/N)\cdot 1\cdot (N-1)} \\ 1 & e^{i(2\pi/N)\cdot 2\cdot 1} & e^{i(2\pi/N)\cdot 2\cdot 2} & \cdots & e^{i(2\pi/N)\cdot 2\cdot (N-1)} \\ 1 & e^{i(2\pi/N)\cdot 3\cdot 1} & e^{i(2\pi/N)\cdot 3\cdot 2} & \cdots & e^{i(2\pi/N)\cdot 3\cdot (N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{i(2\pi/N)\cdot (N-1)\cdot 1} & e^{i(2\pi/N)\cdot (N-1)\cdot 2} & \cdots & e^{i(2\pi/N)\cdot (N-1)\cdot (N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}$$

となる．ここで指数関数をもうひとつ見やすくしてみよう． $\xi_N = e^{i2\pi/N}$ とすれば，

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (\xi_N^*)^1 & (\xi_N^*)^2 & \cdots & (\xi_N^*)^{N-1} \\ 1 & (\xi_N^*)^2 & (\xi_N^*)^4 & \cdots & (\xi_N^*)^{2(N-1)} \\ 1 & (\xi_N^*)^3 & (\xi_N^*)^6 & \cdots & (\xi_N^*)^{3(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (\xi_N^*)^{N-1} & (\xi_N^*)^{2(N-1)} & \cdots & (\xi_N^*)^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

であり，

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \xi_N^1 & \xi_N^2 & \cdots & \xi_N^{N-1} \\ 1 & \xi_N^2 & \xi_N^4 & \cdots & \xi_N^{2(N-1)} \\ 1 & \xi_N^3 & \xi_N^6 & \cdots & \xi_N^{3(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \xi_N^{N-1} & \xi_N^{2(N-1)} & \cdots & \xi_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}$$

と表せることになる³．この簡略表記を再度和の形に書けば，

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} (\xi_N)^{jn} F_n$$

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\xi_N^*)^{nj} f_j$$

となる．見やすくなったように思う．さらに言えば，離散フーリエ変換（および逆変換）の計算においては1周期内のサンプリング点の個数 N だけが必要なのである（もちろん $N = 2L/\tau$ であるので間接的には $2L, \tau$ も必要であるが）．

³ ξ_N に対してこのような変形ができるのは，各行列要素が ξ_N の整数乗であるからである．うっかりしがちであるが， $e^{\alpha\beta}$ において，少なくともどちらかが複素数である場合には， $e^{\alpha\beta} = (e^\alpha)^\beta$ は一般に成立するとは限らない．もし成り立つとすると， θ を実数として

$$e^{i\theta} = e^{i\theta \frac{2\pi}{2\pi}} = e^{i2\pi \cdot \frac{\theta}{2\pi}} = \left(e^{i2\pi} \right)^{\frac{\theta}{2\pi}} = 1^{\frac{\theta}{2\pi}} = 1$$

となってしまう．これは無茶な話であり矛盾である．しかしながら，整数乗の場合は例外である，定義の基本に帰って計算をしてみると，

$$\left(e^{i\theta} \right)^K = e^{i\theta} e^{i\theta} \cdots e^{i\theta} \quad (e^{i\theta} \text{ の } K \text{ 個の積}) = e^{i\theta K}$$

となるので，問題はない．なお α, β ともに実数であれば， $e^{\alpha\beta} = (e^\alpha)^\beta$ は常に成り立つ（というか，そう指数関数を定義した？）．

7.3.2 行列相互の関係

離散フーリエ変換，逆変換を示す2つの行列をそれぞれ M , L として再度記すと，

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\xi_N^*)^1 & (\xi_N^*)^2 & \dots & (\xi_N^*)^{N-1} \\ 1 & (\xi_N^*)^2 & (\xi_N^*)^4 & \dots & (\xi_N^*)^{2(N-1)} \\ 1 & (\xi_N^*)^3 & (\xi_N^*)^6 & \dots & (\xi_N^*)^{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\xi_N^*)^{N-1} & (\xi_N^*)^{2(N-1)} & \dots & (\xi_N^*)^{(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi_N^1 & \xi_N^2 & \dots & \xi_N^{N-1} \\ 1 & \xi_N^2 & \xi_N^4 & \dots & \xi_N^{2(N-1)} \\ 1 & \xi_N^3 & \xi_N^6 & \dots & \xi_N^{3(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_N^{N-1} & \xi_N^{2(N-1)} & \dots & \xi_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

であった．列ベクトル \vec{F}, \vec{f} を

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

とすれば，離散フーリエ変換は

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{1}{N} M \vec{f} \\ \vec{f} &= L \vec{F} \end{aligned}$$

となる．さらにここで $M' = \frac{1}{N} M$ と係数をなかに組み込んでしまえば，

$$\begin{aligned} \vec{F} &= M' \vec{f} = M' L \vec{F} \\ \vec{f} &= L \vec{F} = L M' \vec{f} \end{aligned}$$

であるので，

$$M' L = L M' = \mathbf{1}$$

となり， L, M' 各々が逆行列であることが分かる ($\mathbf{1}$ はいわずと知れた単位行列)．さらに M, L をみると⁴

$$\begin{aligned} M^\dagger &= L \\ L^\dagger &= M \end{aligned}$$

となっている．つまり， M, L はお互いエルミート共役行列（随伴行列）になっているのである．

7.3.3 フーリエ変換の成分の関係

離散フーリエ変換の場合には，サンプリング点の個数が有限 (N) であることから，フーリエ変換の成分どうしに特徴的な関係が生じる．それを見ていこう．

⁴ A^\dagger は，行列 A を転置し，かつ，その各成分を複素共役に置き換えた行列を表す．

n 番目のフーリエ変換の成分は

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\xi_N^*)^{nj} f_j$$

であった。ここで $k := N - n$ としてみる。 n の取りうる範囲を考慮すると、 k の取りうる範囲が $0, 1, \dots, (N-1)$ であることは明らかだ。さてこの k 番目のフーリエ変換の成分を計算すると、 $\xi_N = e^{i2\pi/N}$ であったから、

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\xi_N^*)^{kj} f_j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\xi_N^*)^{(N-n)j} f_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ (\xi_N^*)^{Nj} (\xi_N^*)^{(-nj)} \right\} f_j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ (\xi_N^*)^{Nj} (\xi_N^*)^{(-nj)} \right\} f_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ e^{-i\frac{2\pi}{N}Nj} e^{-i\frac{2\pi}{N}(-nj)} \right\} f_j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ e^{-i2\pi j} e^{i\frac{2\pi}{N}nj} \right\} f_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nj} f_j \end{aligned}$$

であり、この複素共役を取れば、

$$F_k^* = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}nj} f_j = F_n \iff F_{N-n}^* = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}nj} f_j = F_n$$

となる。例えば $N = 8$ の場合を考えれば、離散フーリエ変換の成分に関して

$$\begin{aligned} F_0 &= (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7)/N \\ F_1 &= F_7^* \\ F_2 &= F_6^* \\ F_3 &= F_5^* \\ F_4 &= F_4^* \quad (\text{すなわち必ず実数}) \\ F_5 &= F_3^* \\ F_6 &= F_2^* \\ F_7 &= F_1^* \end{aligned}$$

となっているのである。

7.3.4 具体的な量との関係

離散フーリエ変換においてはその 1 周期内のサンプリング点の個数 N のみで計算が進められ、

$$\begin{aligned} \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{N-1}\} \\ \{F_0, F_1, F_2, \dots, F_{N-1}\} \end{aligned}$$

なる数値を決めることができた。一方、この簡略表記をもとに戻してみるとそれらは、

$$\begin{aligned} f_j &= f(x_j) = f(\tau j) \\ F_n &= F(\lambda_n) = F(\Lambda n) = F\left(\frac{1}{N} \frac{2\pi}{\tau} n\right) \end{aligned}$$

であった。関数にもどって、その変数との関係を示せば、 f の方は τ の間隔でのサンプリングによる離散化であり、 F の方は $2\pi/(N\tau)=\pi/L$ の間隔でのサンプリングによる離散化となっていたのだ。

具体例を考えてみよう。いま周期的サンプリング離散変数関数 $f(x)$ において、その周期($2L$)は100秒で、サンプリング間隔(τ)が12.5秒であったとする。すると1周期のサンプリング点の個数(N)は8である。その場合、

$$\begin{aligned} \text{元の関数 } f(x) &: x \text{ は } 12.5 \text{ (}\tau\text{) 秒間隔でサンプリング} \\ \text{離散フーリエ変換の関数 } F(\lambda) &: \lambda \text{ は } \pi/50 \text{ (}2\pi/(N\tau)\text{) 間隔でサンプリング (単位は } 1/s \text{ つまり周波数)} \end{aligned}$$

という結果になるのである。計測データなどの実際の量に当てはめる場合はこれを忘れてはならない。

7.4 ベクトル表現

今、対象とする関数はすべて周期的なサンプリング離散変数関数であるとしよう。本章での理路と同様に1周期内のサンプリング点の個数は N である(その他のパラメタも同じものを使う)。各サンプリング点を x_j ($j=0,1,\dots,N-1$)とあらわし、その上でこの舞台でのベクトルの内積を

$$\langle f(x_j) | g(x_j) \rangle_N := \sum_{j=0}^{N-1} f^*(x_j)g(x_j)$$

と定義する。さてここで、

$$B := \left\{ \left| e^{i\lambda_n x_j} \right\rangle \mid n = 0, 1, \dots, N-1 \right\}$$

というベクトルの有限集合 B を用意する。このベクトル間の内積は

$$\langle e^{i\lambda_m x_j} | e^{i\lambda_n x_j} \rangle_N = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_m x_j} e^{i\lambda_n x_j} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(\lambda_n - \lambda_m)x_j} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)j} = N\delta(m, n)$$

となり、直交していることがわかる⁵。この結果をうけて、ここから、 B がこの舞台での基底ベクトルをなしているとみなすことにしよう。その上で、正規性を要請すれば、この表現モデルは

$$\begin{aligned} \hat{P}_n &= \left| e^{i\lambda_n x_j} \right\rangle \langle e^{i\lambda_n x_j} | \\ \hat{1} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| e^{i\lambda_n x_j} \right\rangle \langle e^{i\lambda_n x_j} | \end{aligned}$$

と表せる。この表現のもとで $|f(x_j)\rangle$ を展開すれば、

$$\begin{aligned} F(\lambda_n) &:= \frac{1}{N} \langle e^{i\lambda_n x_j} | f(x_j) \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\lambda_n x_j} f(x_j) \\ |f(x_j)\rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| e^{i\lambda_n x_j} \right\rangle \langle e^{i\lambda_n x_j} | f(x_j) \rangle_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left| e^{i\lambda_n x_j} \right\rangle F(\lambda_n) \end{aligned}$$

となる。表現 $|x\rangle$ で関数表現にすれば、

$$f(x_j) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\lambda_n x_k} F(\lambda_n)$$

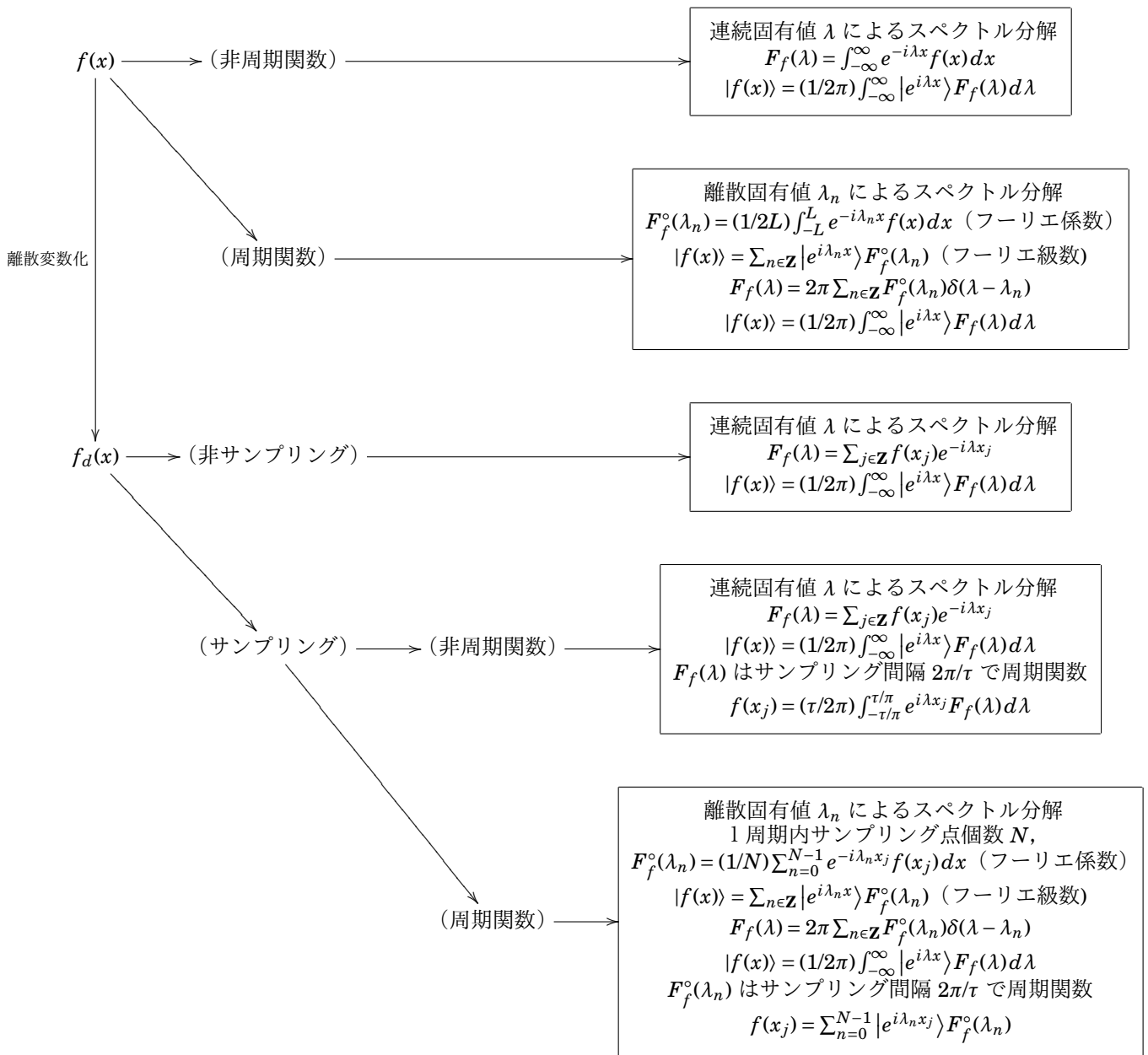
⁵少し前でも引用したが、付録A.2 (p.83)を参照。

とサンプリング点での関数値が導かれる。以上から、上記内積の定義のもとで、 B を基底ベクトルとして、離散フーリエ変換を線形代数的に扱っても問題ないと言えるだろう。

さて、この導出はすっきりとしていて見通しがよいのであるが、個人的には腑に落ちない部分があった（いまでもある）。本書では、フーリエ変換、フーリエ級数の導出において、エルミート作用素 $\hat{H} = -id/dx$ の固有値と固有ベクトルを基礎に基底ベクトルを同定した。そこで、離散変数関数が、微分を伴う作用素 \hat{H} の固有ベクトルと言えるのかという疑問が湧いた（連続でないものをどうやって微分するのか）。またそれにともなって、固有ベクトルであるかどうかわからない段階で、直交するベクトルの集合が見つかった場合、基底ベクトルと言えてしまえるのか、というのも疑問であった。形式的には綺麗な定式化になっているので、筋としてはいいのだと思うのだが、基本的な部分での洞察がどうも筆者にかけているようなので、すなおに腑に落ちなかったのだと思う。とりあえず、備忘録としてこのコメントを記述しておく。いつか、理解が深まると嬉しいのだが。

第8章 フーリエ変換の関連図

いままで出てきたフーリエ変換の分類と関連をまとめておこう。関数のスペクトル分解（フーリエ逆変換）の形はどの関数でも同様である。フーリエ変換は場合によって異なる。なお以下において、いままでのように周期関数の周期は $2L$ とし、 Λ は $\Lambda 2L = 2\pi$ となる定数で $\lambda_n = n\Lambda$ 、 x のサンプリング間隔を τ とする。



第9章 合成積（畳み込み積, convolution）とその フーリエ変換

合成積は、どういうところから考え出されてきたのだろうか？

9.1 合成積（畳み込み積, convolution）

2つの関数の合成積という（ある意味人工的かもしれない）ものを考える。 $f(x), g(x)$ の合成積を $f(x) * g(x)$ や $(f * g)(x)$ とあらわし、その定義を、積分を用いて

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p) dp$$

と定める。基本的な性質を見ておこう。まず、

$$\begin{aligned} f(x) * \{g(x) + h(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p)\{g(x-p) + h(x-p)\} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(p)g(x-p) + f(p)h(x-p)\} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p) dp + \int_{-\infty}^{\infty} f(p)h(x-p) dp \\ &= f(x) * g(x) + f(x) * h(x) \end{aligned}$$

であり、順序の変更に関しても

$$\begin{aligned} g(x) * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(p)f(x-p) dp \quad (q = x-p, \quad dp = dq) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-q)f(q) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(q)g(x-q) dp \\ &= f(x) * g(x) \end{aligned}$$

と交換できることがわかる。

9.2 合成積のフーリエ変換

合成積をフーリエ変換しよう.

$$\begin{aligned}
 F_{f * g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\lambda x} \{f(x) * g(x)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\lambda x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)g(x-p) \right\} \quad (x = q + p, \quad dx = dq + dp) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (dq + dp) e^{-i\lambda(q+p)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)g(q) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-i\lambda(q+p)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)g(q) \right\} + \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\lambda(q+p)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)g(q) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp e^{-i\lambda(q+p)} f(p)g(q) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp dp e^{-i\lambda(q+p)} f(p)g(q)
 \end{aligned}$$

となる. ここで, $dp dp$ は同一な微分の 2 次のオーダーになるので無視してかまわない¹. したがって,

$$\begin{aligned}
 F_{f * g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp e^{-i\lambda(q+p)} f(p)g(q) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp e^{-i\lambda q} e^{-i\lambda p} f(p)g(q) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-i\lambda p} f(p) \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-i\lambda q} g(q) \\
 &= F_f(\lambda) \cdot F_g(\lambda)
 \end{aligned}$$

つまり, 「合成積のフーリエ変換は, フーリエ変換の積」となるのである.

9.3 積のフーリエ変換

2つの関数の積 $h(x) = f(x)g(x)$ をフーリエ変換してみよう. まずこの各々をフーリエ逆変換をもちいて, 積分変数を変えてあらわしておく:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda x} F_f(\lambda), \\
 g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} F_g(\omega).
 \end{aligned}$$

¹ $dq dp$ は異なる微分の 2 次のオーダーなので無視はできない.

この時,

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda x} F_f(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} F_g(\omega) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda d\omega e^{i\lambda x} e^{i\omega x} F_f(\lambda) F_g(\omega) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda d\omega e^{i(\lambda+\omega)x} F_f(\lambda) F_g(\omega) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (d\mu - d\lambda) e^{i\mu x} F_f(\lambda) F_g(\mu - \lambda) \quad (\lambda + \omega =: \mu, \quad d\lambda + d\omega = d\mu) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda d\mu e^{i\mu x} F_f(\lambda) F_g(\mu - \lambda) \quad (d\lambda d\lambda \text{ の項は無視}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{i\mu x} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F_f(\lambda) F_g(\mu - \lambda) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i\mu x} \left\{ \frac{1}{2\pi} F_f(\mu) * F_g(\mu) \right\}
 \end{aligned}$$

となり, これはフーリエ逆変換の式であるから,

$$F_h(\mu) = \frac{1}{2\pi} \cdot F_f(\mu) * F_g(\mu)$$

と言える.

同様なことだが, 積分形式に持ち込まず, フーリエ変換の対称性からの導出もしてみよう. 対称性から,

$$\begin{aligned}
 f(x) &\xrightarrow{F} F_f(\lambda) & \xrightarrow{F} G_{F_f}(x) &= 2\pi f(-x) \\
 g(x) &\xrightarrow{F} F_g(\lambda) & \xrightarrow{F} G_{F_g}(x) &= 2\pi g(-x)
 \end{aligned}$$

であった. また同様にして,

$$(f * g)(x) \xrightarrow{F} F_{f * g}(\lambda) \xrightarrow{F} G_{F_{f * g}}(x) = 2\pi(f * g)(-x) = 2\pi f(-x) * g(-x)$$

でもある. したがって,

$$G_{F_{f * g}}(x) = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} G_{F_f}(x) * \frac{1}{2\pi} G_{F_g}(x) \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot G_{F_f}(x) * G_{F_g}(x).$$

一方, 合成積のフーリエ変換はフーリエ変換の積であった. 具体的に書けば

$$F_{f * g}(\lambda) = F_f(\lambda) F_g(\lambda),$$

であり, この両辺をフーリエ変換すれば

$$G_{F_{f * g}}(x) = G_{F_f F_g}(x)$$

が得られる. 以上から,

$$G_{F_f F_g}(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot G_{F_f}(x) * G_{F_g}(x)$$

となる. G もフーリエ変換であったことを思い出せば, この式の意味は,

F_f と F_g の積のフーリエ変換は、 F_f のフーリエ変換と F_g のフーリエ変換の合成積の $1/2\pi$ 倍である

ということだ。 F もフーリエ変換なので、同様のことが言える。

$$F_f(\lambda)F_g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot F_f(\lambda) * F_g(\lambda)$$

つまり、「積のフーリエ変換は、フーリエ変換の合成積」となるのである。変数などを整理して、合成積に関する「対称性」をまとめておこう：

$$F_{f*g}(\mu) = F_f(\mu)F_g(\mu),$$

$$F_{fg}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \cdot F_f(\mu) * F_g(\mu).$$

第10章 フーリエ解析の実践

いままでの議論で、関数のスペクトル分解のかたちが、周期関数、非周期関数の場合それぞれについて求まった。代数的にはこれで「以上終了」の趣きがある。とはいえ、実際に関数形を求めるには具体的に計算を試みるしかしょうがない。本章では典型的な事例について計算を行ってみる。本稿が「備忘録」であることを踏まえ、計算の詳細も馬鹿丁寧に記述するようにした。

10.1 そもそも何を計算するのか

フーリエ級数、フーリエ変換、などを用いての解析的扱い（フーリエ解析）において、関数は

$$\begin{aligned} |f_{2L}(x)\rangle &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda_n x}\rangle \langle e^{i\lambda_n x} | f_{2L}(x) \rangle_{2L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda_n x}\rangle F_f(\lambda_n) \\ |f(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x} | f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |e^{i\lambda x}\rangle F_f(\lambda) \end{aligned}$$

というように基底ベクトルによるスペクトル分解式としてあらわせた（ f_{2L} は周期 $2L$ をあらわす）。そして実際に計算する部分はその内積である。その内積は、正規直交基底ベクトルの成分に他ならない。つまり、もとの $|f(x)\rangle$ を基底ベクトルごとに分解し、その成分を求めようとするのである。これをフーリエ級数の場合には「離散スペクトル分解」、フーリエ変換の場合には「連続スペクトル分解」と述べたりするのである。離散、連続の違いこそあれ、成分を求めていることに変わりはない。

以下代表的な具体例を見ていこう。なおここでは、変数や定数については x などにかぎらずいろいろと適当なものを使っているが、もちろん表象が違っているだけで、本質に差はない。

10.2 フーリエ級数編

10.2.1 周期 $2L$ の関数 $2\sin(2\Omega t)$ のフーリエ級数

定数は、 $\Omega \cdot 2L = 2\pi$ を満たすものである。フーリエ級数による表現は、 n を整数として、

$$|2\sin(2\Omega t)\rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{in\Omega t}\rangle \langle e^{in\Omega t} | 2\sin(2\Omega t) \rangle_{2L} \quad (10.2.1)$$

である。右辺の内積の項は、整数 n の関数とみなせるのでいまそれを $C(n)$ とする。つまり、

$$C(n) := \frac{1}{2L} \langle e^{in\Omega t} | 2\sin(2\Omega t) \rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\Omega t} \cdot 2\sin(2\Omega t) dt.$$

ここで、計算のために、 $x = \Omega t$ と変数変換を行う。この時、

$$dx = \Omega dt, \quad \begin{array}{c|c} t & -L \rightarrow L \\ \hline x & -\pi \rightarrow \pi \end{array}$$

なので、 $C(n)$ は次の様になる:

$$C(n) = \frac{1}{2L} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cdot 2 \sin(2x) \frac{1}{\Omega} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \sin(2x) dx.$$

ここで、三角関数で攻めるか(複素) 指数関数で攻めるか若干迷う所ではあるが、指数関数の方が扱いやすい(と個人的に思う)ので、指数関数で行こう。すると、

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \sin(2x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} (e^{i2x} - e^{-i2x}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(2-n)x} - e^{-i(2+n)x}) dx. \end{aligned}$$

そして、この積分を2つに分ける。それを次の様に定義する。

$$\begin{aligned} I_{2-}(n) &:= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2-n)x} dx, \\ I_{2+}(n) &:= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(2+n)x} dx. \end{aligned}$$

ここからはわりと「定番処理」になる。まず、 $I_{2-}(n)$ において、 $n=2$ であれば、被積分関数は1なので、

$$I_{2-}(2) = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

$n \neq 2$ の時は

$$I_{2-}(n \neq 2) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2-n)x} dx = \left[\frac{1}{i(2-n)} e^{i(2-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

同様なことが $I_{2+}(n)$ にも言えて、

$$\begin{aligned} I_{2+}(-2) &= \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \\ I_{2+}(n \neq -2) &= 0. \end{aligned}$$

つまり、 $C(n) = 1/(2\pi i) (I_{2-}(n) - I_{2+}(n))$ は $n=2, n=-2$ の時のみ値を持ち、それは

$$\begin{aligned} C(2) &= \frac{1}{2\pi i} I_{2-}(2) = \frac{1}{i}, \\ C(-2) &= -\frac{1}{2\pi i} I_{2+}(-2) = \frac{-1}{i}. \end{aligned}$$

さて、ここで求めた $C(n)$ を用いて再度 フーリエ級数 (10.2.1) を眺めると、

$$\begin{aligned} |2 \sin(2\Omega t)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{in\Omega t}\rangle \langle e^{in\Omega t} | 2 \sin(2\Omega t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n) |e^{in\Omega t}\rangle \\ &= C(2) |e^{i2\Omega t}\rangle + C(-2) |e^{-i2\Omega t}\rangle = \frac{1}{i} |e^{i2\Omega t}\rangle + \frac{-1}{i} |e^{-i2\Omega t}\rangle \end{aligned}$$

とスペクトル分解されることが見えた。

表現 $|t\rangle$ で関数表現にすると、

$$2 \sin(2\Omega t) = \frac{1}{i} e^{i2\Omega t} + \frac{-1}{i} e^{-i2\Omega t} = \frac{e^{i2\Omega t} - e^{-i2\Omega t}}{i} = 2 \sin(2\Omega t)$$

となり、めでたしである。なお、この例からも分かる通り、周期 $2L$ であっても実際の積分は置換積分 $x = \Omega t$ を施すことにより周期 2π の計算になる。必要に応じて置換積分をすればいいので、周期 2π のもののみを考えていても一般性は失われまい。

10.2.2 周期 2π の関数 $2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)$ のフーリエ級数

フーリエ級数表現は,

$$|2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e^{int} | \langle e^{int} | 2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)\rangle_{2\pi} \quad (10.2.2)$$

である. グラフはつぎのとおり (図 10.1).

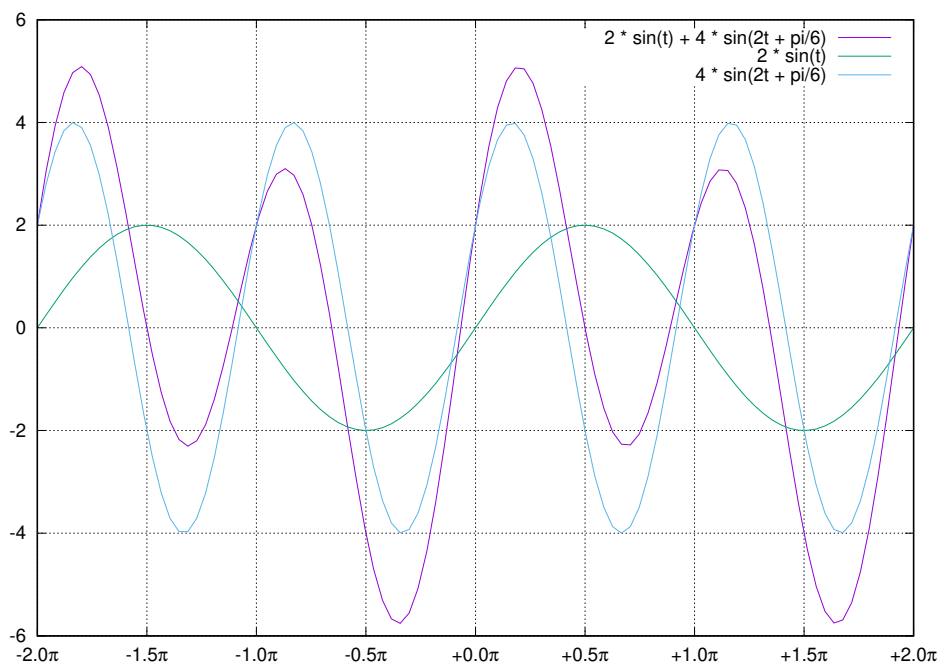


図 10.1: $2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)$ のグラフ

さきの例と同様に右辺の内積の項を $C(n)$ とし, 三角関数を (複素) 指数関数で表現していくと,

$$\begin{aligned} C(n) &:= \frac{1}{2\pi} \langle e^{int} | 2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)\rangle_{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \cdot (2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \cdot (\sin(t) + 2\sin(2t + \pi/6)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + \frac{2(e^{i(2t+\pi/6)} - e^{-i(2t+\pi/6)})}{2i} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (e^{it} - e^{-it} + 2e^{i(2t+\pi/6)} - 2e^{-i(2t+\pi/6)}) dt \end{aligned}$$

ここで, 計算を簡単にするために, 次の式変形を行う.

$$\begin{aligned} 2e^{i(2t+\pi/6)} &= 2e^{i2t} e^{i\pi/6} =: A e^{i2t} \quad (A := e^{i\pi/6}) \\ 2e^{-i(2t+\pi/6)} &= 2e^{-i2t} e^{-i\pi/6} =: B e^{-i2t} \quad (B := e^{-i\pi/6}) \end{aligned}$$

これにより,

$$\begin{aligned}
 C(n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (e^{it} - e^{-it} + 2e^{i(2t+\pi/6)} - 2e^{-i(2t+\pi/6)}) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} (e^{it} - e^{-it} + Ae^{i2t} - Be^{-i2t}) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{it(1-n)} - e^{-it(1+n)} + Ae^{it(2-n)} - Be^{-it(2+n)}) dt.
 \end{aligned}$$

積分を4つに分けよう。それらを次の様に定義する。

$$\begin{aligned}
 I_{1-}(n) &:= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(1-n)} dt, \\
 I_{1+}(n) &:= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(1+n)} dt, \\
 I_{2-}(n) &:= \int_{-\pi}^{\pi} Ae^{it(2-n)} dt, \\
 I_{2+}(n) &:= \int_{-\pi}^{\pi} Be^{-it(2+n)} dt.
 \end{aligned}$$

これを用いると, $C(n)$ は

$$C(n) = \frac{1}{2\pi i} (I_{1-}(n) - I_{1+}(n) + I_{2-}(n) - I_{2+}(n)).$$

ここからは「定番処理」である。指数関数の「肩」が0でない場合には、積分範囲が $-\pi \rightarrow \pi$ なので積分は0。それ以外であれば、被積分関数は1なので、

$$\begin{aligned}
 I_{1-}(1) &= 2\pi, \\
 I_{1+}(-1) &= 2\pi, \\
 I_{2-}(2) &= 2\pi A, \\
 I_{2+}(-2) &= 2\pi B.
 \end{aligned}$$

つまり, $C(n)$ は $n = -1, 1, 2, -2$ の時のみ値を持ち, それは

$$\begin{aligned}
 C(1) &= \frac{1}{2\pi i} I_{1-}(1) = \frac{1}{i}, \\
 C(-1) &= -\frac{1}{2\pi i} I_{1+}(-1) = -\frac{1}{i}, \\
 C(2) &= \frac{1}{2\pi i} I_{2-}(2) = \frac{A}{i}, \\
 C(-2) &= -\frac{1}{2\pi i} I_{2+}(-2) = -\frac{B}{i}.
 \end{aligned}$$

さて, ここで求めた $C(n)$ を用いて再度 フーリエ級数 (10.2.2) を眺めると,

$$\begin{aligned}
 |2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{int}\rangle \langle e^{int} | 2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)\rangle_{2\pi} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n) |e^{int}\rangle \\
 &= C(1) |e^{it}\rangle + C(-1) |e^{-it}\rangle + C(2) |e^{i2t}\rangle + C(-2) |e^{-i2t}\rangle \\
 &= \frac{1}{i} |e^{it}\rangle + \frac{-1}{i} |e^{-it}\rangle + \frac{A}{i} |e^{i2t}\rangle + \frac{-B}{i} |e^{-i2t}\rangle
 \end{aligned}$$

というスペクトル分解が導ける。

関数としては、

$$\begin{aligned} 2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6) &= \frac{1}{i}e^{it} - \frac{1}{i}e^{-it} + \frac{A}{i}e^{i2t} - \frac{B}{i}e^{-i2t} \\ &= 2 \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} + 4 \cdot \frac{e^{i(2t+\pi/6)} - e^{-i(2t+\pi/6)}}{2i} \\ &= 2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6) \end{aligned}$$

となり、あらためて、めでたしである。

10.2.3 周期 2π のノコギリ波のフーリエ級数

ノコギリ波の関数は、床関数 floor^1 をもちいて、

$$N(x) = 2(x/2\pi - \lfloor (x/2\pi + 1/2) \rfloor)$$

と記述できる（グラフは図 10.2）。

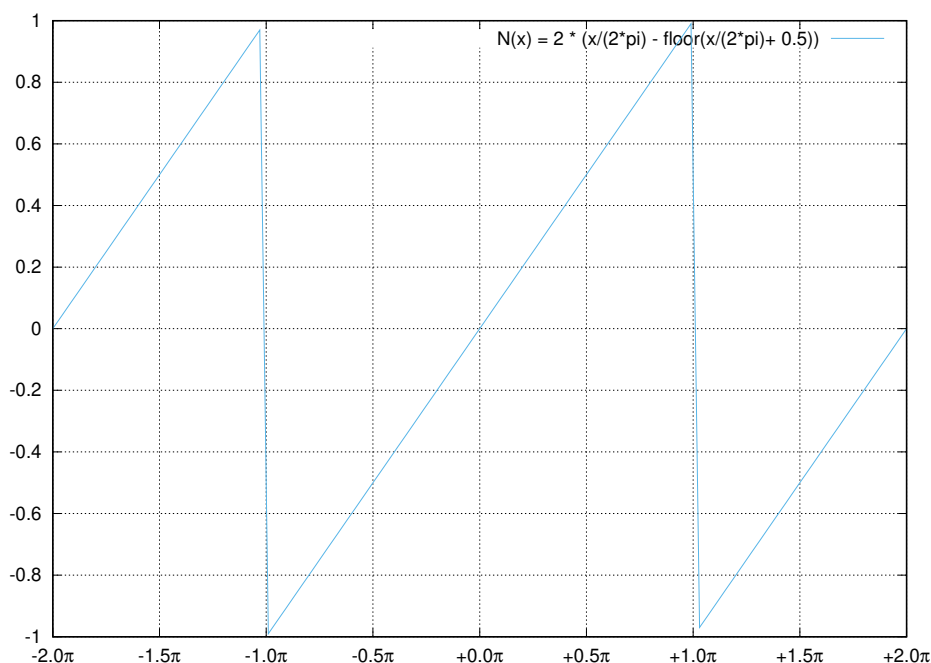


図 10.2: $N(x) = 2(x/2\pi - \lfloor (x/2\pi + 1/2) \rfloor)$ のグラフ

しかし、この関数は π の整数倍のところでは連続ではない。しかしながらそれにはちょっと目をつぶって、 $-\pi$ から π の限定された範囲で

$$f(t) = t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

とし、ノコギリの「斜線」の部分にのみ焦点をあてよう。

¹ $\text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor = [x]$ などと書かれる関数で、 x を超えない最大の整数を返す関数である。 $[x]$ をガウス記号とも言う。 $\lfloor x \rfloor$ と書いたりもする。

フーリエ級数表現は、 n を整数として、いつものように

$$|f(t)\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{int}\rangle \langle e^{int} | f(t)\rangle_{2\pi}$$

で、 $A(n)$ を

$$A(n) := \frac{1}{2\pi} \langle e^{int} | f(t)\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \cdot t dt$$

としよう。さてこの $A(n)$ の積分をみると、部分積分で求めるのが筋道とみえるが、「分母」が 0 となるような場合は避けておかねばならない。なので、まず $n=0$ の場合を考える²。

$$A(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

つぎに、 $n \neq 0$ を考える。 $A(n)$ を部分積分すると³

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \cdot t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-in} \left\{ \left[e^{-int} \cdot t \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-in} \left\{ \left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi} \right) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt \right\} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = \left[\frac{1}{-in} e^{-int} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{-in} \left(e^{-in\pi} - e^{in\pi} \right) = \frac{2}{n} \left(\frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2i} \right) = \frac{2}{n} \sin(n\pi) = 0$$

とつねに 0 であるから、

$$A(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-in} \left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi} \right) = \frac{1}{-in} \left(\frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{2} \right) = \frac{1}{-in} \cos(n\pi) = \frac{1}{-in} (-1)^n = \frac{i}{n} (-1)^n$$

となる。したがって、

$$|f(t)\rangle = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{int}\rangle \frac{i}{n} (-1)^n & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

これでフーリエ級数は求まった。複素指数関数部分を三角関数を用いて、関数表現 $f(t)$ を書くと、

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\cos(nt) + i \sin(nt) \right) \frac{i}{n} (-1)^n & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \quad (10.2.3)$$

であり、ここにあらわれるこの和は計算によってもっと簡明になる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(\cos(nt) + i \sin(nt) \right) \frac{i}{n} (-1)^n &= i \left\{ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nt) \right\} - \left\{ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right\} \\ &= i \left\{ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos(nt) \right\} + \left\{ \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \right\}. \end{aligned}$$

²奇関数なので、計算するまでもなく 0 になるのであるが。

³まず微分の chain rule から、 $(uv)' = u'v + uv'$ である。そして、これに積分記号をかぶせると、

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv' \iff (uv) = \int u'v + \int uv'$$

となる。高校時代の教えである。

いまここで

$$C(n) := \frac{(-1)^n}{n} \cos(nt),$$

$$S(n) := \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

としよう. たとえば, $n = -5, 5$ での具体例をみると,

$$C(-5) = \frac{(-1)^{(-5)}}{-5} \cos(-5t) = \frac{1}{5} \cos(-5t) = \frac{1}{5} \cos(5t),$$

$$C(5) = \frac{(-1)^{(5)}}{5} \cos(5t) = -\frac{1}{5} \cos(5t),$$

$$S(-5) = \frac{(-1)^{-5+1}}{-5} \sin(-5t) = \frac{1}{-5} \sin(-5t) = \frac{1}{5} \sin(5t),$$

$$S(5) = \frac{(-1)^{5+1}}{5} \sin(5t) = \frac{1}{5} \sin(5t),$$

となる. つまり, 三角関数の偶奇性, $(-1)^n$ の偶奇性, そして n の偶奇性から,

$$C(-n) = -C(n),$$

$$S(-n) = S(n)$$

と言えることがわかる. したがって, $C(n)$ の和は相殺して 0 になり (奇関数的), $S(n)$ の和は和の範囲を $n > 0$ として半分に分けたものの 2 倍になる (偶関数的). 以上より $n = 0$ の場合もまとめて, 式 (10.2.3) は,

$$f(t) = t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} S(n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

となる.

10.2.4 フーリエ級数の実数表現の導出

第 3 章『フーリエ級数 (1 周期分のフーリエ変換)』ではフーリエ級数を複素数 ($e^{i\lambda_n x}$) を用いて導出した. ここではその実数版を導出してみよう.

周期 $2L$ の関数 $f(x)$ の離散的なスペクトル分解 (フーリエ級数展開), フーリエ係数はそれぞれ

$$|f(x)\rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{i\lambda_n x}\rangle F_f^\circ(\lambda_n)$$

$$F_f^\circ(\lambda_n) = \frac{1}{2L} \langle e^{i\lambda_n x} | f(x) \rangle_{2L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\lambda_n x} f(x) dx$$

であり, かつ, フーリエ係数には

$$F_f^\circ(\lambda_{(-n)}) = (F_f^\circ(\lambda_n))^*$$

という特徴的な関係があった.

さてここから, 記述の簡便性と見通しのよさを図るため, $C_n := F_f^\circ(\lambda_n)$ とし, さらに $\lambda_n = n\Lambda$ と表記しなお

して、無限和を分解してみよう。具体的に記すと、

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{in\Lambda x}\rangle C_n \\ &= C_0 |e^{i0\Lambda x}\rangle + \\ &\quad C_1 |e^{i1\Lambda x}\rangle + C_2 |e^{i2\Lambda x}\rangle + C_3 |e^{i3\Lambda x}\rangle + \dots \\ &\quad C_{-1} |e^{-i1\Lambda x}\rangle + C_{-2} |e^{-i2\Lambda x}\rangle + C_{-3} |e^{-i3\Lambda x}\rangle + \dots \end{aligned}$$

となる。\$C_n\$ は一般に複素数であるから \$a_n, b_n\$ を実数として \$C_n = a_n - ib_n\$ とあらわすことができる⁴。また \$C_{-n} = C_n^*\$ であったから、\$C_{-n} = a_n + ib_n\$ でもある。これらを利用すると、

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{in\Lambda x}\rangle C_n \\ &= (a_0 - ib_0) |e^{i0\Lambda x}\rangle + \\ &\quad (a_1 - ib_1) |e^{i1\Lambda x}\rangle + (a_2 - ib_2) |e^{i2\Lambda x}\rangle + (a_3 - ib_3) |e^{i3\Lambda x}\rangle + \dots \\ &\quad (a_1 + ib_1) |e^{-i1\Lambda x}\rangle + (a_2 + ib_2) |e^{-i2\Lambda x}\rangle + (a_3 + ib_3) |e^{-i3\Lambda x}\rangle + \dots \end{aligned}$$

であり、\$a_n, b_n\$ に着目して和を並び替え計算を進めていくのだが⁵、そのまえに \$(a_0 - ib_0) |e^{i0\Lambda x}\rangle\$ の項を考えてみよう。\$a_0 - ib_0 = C_0\$ であった。そして \$C_0\$ は

$$C_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i \cdot 0 \cdot \Lambda x} f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

なので、実数にしかなりえない。よって、\$b_0 = 0\$ でなければならない。したがって、\$(a_0 - ib_0) |e^{i0\Lambda x}\rangle = a_0 |1\rangle\$ である。この結果も利用して、和を並び替えよう。

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= \frac{1}{2L} \sum_{n \in \mathbf{Z}} |e^{in\Lambda x}\rangle C_n \\ &= a_0 |1\rangle + a_1 (|e^{i1\Lambda x}\rangle + |e^{-i1\Lambda x}\rangle) + a_2 (|e^{i2\Lambda x}\rangle + |e^{-i2\Lambda x}\rangle) + a_3 (|e^{i3\Lambda x}\rangle + |e^{-i3\Lambda x}\rangle) + \dots \\ &\quad - ib_1 (|e^{i1\Lambda x}\rangle - |e^{-i1\Lambda x}\rangle) - ib_2 (|e^{i2\Lambda x}\rangle - |e^{-i2\Lambda x}\rangle) - ib_3 (|e^{i3\Lambda x}\rangle - |e^{-i3\Lambda x}\rangle) - \dots \\ &= a_0 |1\rangle + a_1 |e^{i1\Lambda x} + e^{-i1\Lambda x}\rangle + a_2 |e^{i2\Lambda x} + e^{-i2\Lambda x}\rangle + a_3 |e^{i3\Lambda x} + e^{-i3\Lambda x}\rangle + \dots \\ &\quad - ib_1 |e^{i1\Lambda x} - e^{-i1\Lambda x}\rangle - ib_2 |e^{i2\Lambda x} - e^{-i2\Lambda x}\rangle - ib_3 |e^{i3\Lambda x} - e^{-i3\Lambda x}\rangle - \dots \\ &= a_0 |1\rangle + 2a_1 \left| \frac{e^{i1\Lambda x} + e^{-i1\Lambda x}}{2} \right\rangle + 2a_2 \left| \frac{e^{i2\Lambda x} + e^{-i2\Lambda x}}{2} \right\rangle + 2a_3 \left| \frac{e^{i3\Lambda x} + e^{-i3\Lambda x}}{2} \right\rangle + \dots \\ &\quad + 2b_1 \left| \frac{e^{i1\Lambda x} - e^{-i1\Lambda x}}{2i} \right\rangle + 2b_2 \left| \frac{e^{i2\Lambda x} - e^{-i2\Lambda x}}{2i} \right\rangle + 2b_3 \left| \frac{e^{i3\Lambda x} - e^{-i3\Lambda x}}{2i} \right\rangle + \dots \\ &= a_0 |1\rangle + 2a_1 |\cos(1\Lambda x)\rangle + 2a_2 |\cos(2\Lambda x)\rangle + 2a_3 |\cos(3\Lambda x)\rangle + \dots \\ &\quad + 2b_1 |\sin(1\Lambda x)\rangle + 2b_2 |\sin(2\Lambda x)\rangle + 2b_3 |\sin(3\Lambda x)\rangle + \dots \\ &= a_0 |1\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2a_n |\cos(n\Lambda x)\rangle + 2b_n |\sin(n\Lambda x)\rangle \} \end{aligned}$$

以上が実数で表現したフーリエ級数である。

⁴\$C_n = a_n + ib_n\$ とするほうが素直であると思うが、\$C_n = a_n - ib_n\$ としたのは、計算を簡単にするためのちょっとしたテクニックである。そのうち \$i^2 = -1\$ と \$\sin\$ 関数の複素指数表現が出てくることをみこして符号を「-」にしている。こういうことは、往々にして、一度計算してから気がつく。

10.3 フーリエ変換編

10.3.1 導関数のフーリエ変換

$|f(x)\rangle$ に \hat{H} を作用させてみよう。まず \hat{H} の固有値方程式を用いれば、

$$\hat{H}|f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \hat{H} |e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x} | f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda |e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x} | f(x)\rangle$$

であり、この $|e^{i\lambda'x}\rangle$ 方向の射影成分は、

$$\begin{aligned} \langle e^{i\lambda'x} | \hat{H} | f(x)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda \langle e^{i\lambda'x} | e^{i\lambda x}\rangle \langle e^{i\lambda x} | f(x)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda \delta(\lambda' - \lambda) \langle e^{i\lambda x} | f(x)\rangle \\ &= \lambda' \langle e^{i\lambda'x} | f(x)\rangle \end{aligned}$$

ともとまる。一方、 \hat{H} をあらわに作用させれば、

$$\hat{H}|f(x)\rangle = \left(-i \frac{d}{dx}\right) |f(x)\rangle = -i \left| \frac{df(x)}{dx} \right\rangle$$

なので、この $|e^{i\lambda'x}\rangle$ 方向の射影成分を計算すると、

$$\langle e^{i\lambda'x} | \hat{H} | f(x)\rangle = -i \left\langle e^{i\lambda'x} \left| \frac{df(x)}{dx} \right\rangle.\right.$$

したがって、

$$\lambda' \langle e^{i\lambda'x} | f(x)\rangle = -i \left\langle e^{i\lambda'x} \left| \frac{df(x)}{dx} \right\rangle\right.$$

が得られる。「フーリエ変換の記号」を利用すると、

$$\lambda' F_f(\lambda') = -i F_{\frac{df}{dx}}(\lambda')$$

であり、 λ' を λ で一般化して

$$F_{\frac{df}{dx}}(\lambda) = i\lambda F_f(\lambda)$$

をうる。導関数のフーリエ変換は、もとの関数のフーリエ変換の $i\lambda$ 倍という性質が存在するのである。これより、

$$F_{\frac{d^2f}{dx^2}}(\lambda) = i\lambda F_{\frac{df}{dx}}(\lambda) = (i\lambda)^2 F_f(\lambda)$$

であるから、一般化すれば

$$F_{\frac{d^n f}{dx^n}}(\lambda) = (i\lambda)^n F_f(\lambda).$$

10.3.2 フーリエ変換の微分

フーリエ変換を微分したものは，元の関数に x を掛けたもののフーリエ変換の $-i$ 倍となる．微分と積分の順序交換を認めて，まっすぐに計算すればよろしい．

$$\begin{aligned}\frac{dF_{f(x)}(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} e^{-i\lambda x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-i\lambda x} f(x) dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} x f(x) dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} (x f(x)) dx \\ &= -i F_{x f(x)}(\lambda).\end{aligned}$$

10.3.3 δ 関数のフーリエ変換

定義どおりに実行する． δ 関数の意味を尊重するのみ．

$$F_{\delta(x)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \delta(x) dx = 1.$$

10.3.4 複素指数関数，三角関数のフーリエ変換

a を実数とする．複素指数関数 e^{iax} のフーリエ変換は

$$F[e^{iax}](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-a)x} dx = 2\pi\delta(\lambda-a)$$

ともとまる．同様にして，

$$F[e^{-iax}](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda+a)x} dx = 2\pi\delta(\lambda+a)$$

となる．

さてここで， $e^{iax} = \cos(ax) + i \sin(ax)$ ， $e^{-iax} = \cos(ax) - i \sin(ax)$ に着目しよう．すなおいに代入すれば

$$\begin{aligned}F[e^{iax}](\lambda) &= F[\cos(ax) + i \sin(ax)](\lambda) \\ F[e^{-iax}](\lambda) &= F[\cos(ax) - i \sin(ax)](\lambda)\end{aligned}$$

を得る．そしてフーリエ変換の線形性を適用すれば

$$\begin{aligned}F[e^{iax}](\lambda) &= F[\cos(ax) + i \sin(ax)](\lambda) = F[\cos(ax)](\lambda) + iF[\sin(ax)](\lambda) \\ F[e^{-iax}](\lambda) &= F[\cos(ax) - i \sin(ax)](\lambda) = F[\cos(ax)](\lambda) - iF[\sin(ax)](\lambda)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}F[e^{iax}](\lambda) + F[e^{-iax}](\lambda) &= 2F[\cos(ax)](\lambda) \iff F[\cos(ax)](\lambda) = \pi\delta(\lambda-a) + \pi\delta(\lambda+a) \\ F[e^{iax}](\lambda) - F[e^{-iax}](\lambda) &= 2iF[\sin(ax)](\lambda) \iff F[\sin(ax)](\lambda) = \frac{1}{i}\pi\delta(\lambda-a) - \frac{1}{i}\pi\delta(\lambda+a)\end{aligned}$$

と三角関数のフーリエ変換も求まる．

10.3.5 実指数関数のフーリエ変換

a を正の実数として,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

なる関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F_{f(x)}(\lambda)$ は

$$F_{f(x)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\lambda)x} dx = \left[\frac{1}{-(a+i\lambda)} e^{-(a+i\lambda)x} \right]_0^{\infty}$$

と計算できる. ここで $x = \infty$ を評価してみよう. 極限を取る操作に移すと

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(a+i\lambda)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\lambda x} e^{-ax} = 0 \quad (e^{-ax} \rightarrow 0 \text{ の寄与が圧倒的})$$

という結果になるので, 最終的に

$$F_{f(x)}(\lambda) = \left[\frac{1}{-(a+i\lambda)} e^{-(a+i\lambda)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\lambda}$$

となる. 次に, 似たような関数

$$g(x) = \begin{cases} e^{ax} & (x < 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

のフーリエ変換を計算してみると,

$$F_{g(x)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} g(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{-i\lambda x} e^{ax} dx = \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\lambda)x} dx = \left[\frac{1}{a-i\lambda} e^{(a-i\lambda)x} \right]_{-\infty}^0$$

であり,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(a-i\lambda)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-i\lambda x} e^{ax} = 0 \quad (e^{ax} \rightarrow 0 \text{ の寄与が圧倒的})$$

なので,

$$F_{g(x)}(\lambda) = \left[\frac{1}{a-i\lambda} e^{(a-i\lambda)x} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-i\lambda}$$

とまとまる.

さてここであらたに, $h(x) := f(x) + g(x)$ を考えよう. この関数形は

$$h(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (0 \leq x) \\ e^{ax} & (x < 0) \end{cases}$$

とまとめることができ, さらにこれは, 絶対値記号を用いて

$$h(x) = e^{-a|x|}$$

とあらわせる. $h(x)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} F_{h(x)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} h(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{-i\lambda x} h(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-i\lambda x} h(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-i\lambda x} g(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx = \frac{1}{a-i\lambda} + \frac{1}{a+i\lambda} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

となる。つまり、 $e^{a|x|}$ のフーリエ変換は

$$F[e^{a|x|}](\lambda) = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}$$

となるのである。スペクトル分解の表現を取れば、

$$|e^{a|x|}\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \lambda^2} |e^{i\lambda x}\rangle d\lambda$$

である。

10.3.6 $e^{-at}e^{ibt}$ のフーリエ変換

a, b を正の実数として、

$$f(t) = e^{-at}e^{ibt}$$

なる関数 $f(t)$ のフーリエ変換を計算しよう（この関数は「減衰関数」と呼ばれるようである）。第 9 章『合成積（畳み込み積, convolution）とそのフーリエ変換』で見たように、関数の積のフーリエ変換は、フーリエ変換の合成積となるのであった。その性質を利用すると、

$$F_{f(t)}(\omega) = F[e^{-at}e^{ibt}](\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot F[e^{-at}](\omega) * F[e^{ibt}](\omega)$$

となる。前節の結果を用いれば

$$\begin{aligned} F[e^{-at}](\omega) &= \frac{1}{a + i\omega} =: a(\omega) \\ F[e^{ibt}](\omega) &= 2\pi\delta(\omega - b) =: b(\omega) \end{aligned}$$

とおのおののフーリエ変換がもとまる。ここでいつも合成積の計算が（個人的に）こんがらがるので、各々のフーリエ変換を $a(\omega), b(\omega)$ とした。そのうえで計算を進めていくと

$$\begin{aligned} a(\omega) * b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(p)b(\omega - p) dp = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + ip} \cdot 2\pi\delta(\omega - p - b) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + ip} \cdot 2\pi\delta(p - (\omega - b)) dp = \frac{2\pi}{a + i(\omega - b)} \end{aligned}$$

結果

$$\begin{aligned} F_{f(t)}(\omega) &= F[e^{-at}e^{ibt}](\omega) = \frac{1}{a + i(\omega - b)} \\ |e^{-at}e^{ibt}\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + i(\omega - b)} |e^{i\omega t}\rangle d\omega \end{aligned}$$

となる。

複素指数関数を三角関数に分解して個別のフーリエ変換を求めてみよう。まず最初は、 $e^{-at} \cos(bt)$ である。

だいぶ計算になれてきたので一挙にやってみる.

$$\begin{aligned}
 F[e^{-at} \cos(bt)](\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot F[e^{-at}](\omega) * F[\cos(bt)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a+i\omega} * (\pi\delta(\omega-b) + \pi\delta(\omega+b)) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a+i\omega} * \pi\delta(\omega-b) + \frac{1}{a+i\omega} * \pi\delta(\omega+b) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\pi}{a+i(\omega-b)} + \frac{\pi}{a+i(\omega+b)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(a+i(\omega+b)) + (a+i(\omega-b))}{(a+i(\omega-b))(a+i(\omega+b))} \\
 &= \frac{a+i\omega}{(a+i\omega)^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

同様にして, $e^{-at} \sin(bt)$ のフーリエ変換も計算すると

$$\begin{aligned}
 F[e^{-at} \sin(bt)](\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot F[e^{-at}](\omega) * F[\sin(bt)](\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a+i\omega} * \left(\frac{1}{i}\pi\delta(\omega-b) - \frac{1}{i}\pi\delta(\omega+b) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a+i\omega} * \frac{1}{i}\pi\delta(\omega-b) - \frac{1}{a+i\omega} * \frac{1}{i}\pi\delta(\omega+b) \right\} \\
 &= \frac{1}{i2\pi} \left\{ \frac{\pi}{a+i(\omega-b)} - \frac{\pi}{a+i(\omega+b)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2i} \frac{(a+i(\omega+b)) - (a+i(\omega-b))}{(a+i(\omega-b))(a+i(\omega+b))} \\
 &= \frac{b}{(a+i\omega)^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

と求まる.

10.3.7 楕円関数のフーリエ変換

楕円関数というのは周期的に δ 関数が並んでいるものであると定義しよう. 人工的な香りのするものである. サンプルング間隔は τ であるが, それは周期 τ でもある. そういう関数になっている. このイメージはこんな感じだろうか (図 10.3).

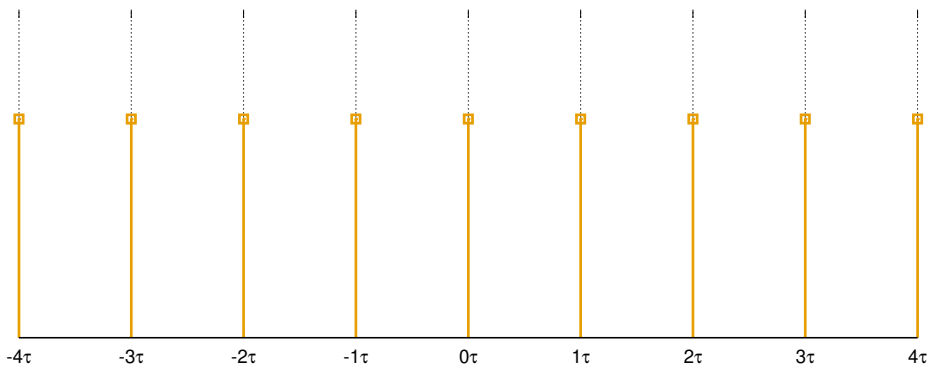


図 10.3: δ 関数がならんだ楕円関数のイメージ

さてこの楕円関数であるが, n を整数として, δ 関数を用いて次の様にあらわすことができる. 離散変数関

数的な記述である：

$$s(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(x - n\tau).$$

$s(x)$ のフーリエ変換を求めよう。戦略は、

$$s(x) \text{ は周期関数} \quad \mapsto \quad \text{フーリエ級数で表現} \quad \mapsto \quad \text{フーリエ変換}$$

である。まずフーリエ級数での表現は、1周期分を考慮するので、 $\Lambda = 2\pi/\tau$ として

$$s(x) = \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ik\Lambda x} \left\langle e^{ik\Lambda x} \middle| s(x) \right\rangle_{\tau}$$

であり、このフーリエ係数は

$$F_{s(x)}^{\circ}(k\Lambda) := \frac{1}{\tau} \left\langle e^{ik\Lambda x} \middle| s(x) \right\rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-ik\Lambda x} s(x) dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx e^{-ik\Lambda x} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta(x - n\tau)$$

である。この積分範囲には、 $n=0$ の δ 関数しか存在しないので（グラフを注意深く見てみよう）、結局の所

$$F_{s(x)}^{\circ}(k\Lambda) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx e^{-ik\Lambda x} \delta(x) = \frac{1}{\tau}$$

したがって、

$$s(x) = \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ik\Lambda x}$$

とフーリエ級数に展開される。これをフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} F_{s(x)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} s(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\lambda x} \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{ik\Lambda x} = \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(\lambda - k\Lambda)x} \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(\lambda - k\Lambda)x} = \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2\pi \delta(\lambda - k\Lambda) = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(\lambda - k\Lambda) \\ &= \Lambda \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(\lambda - k\Lambda) \end{aligned}$$

となり、やはり λ の世界での楕円関数になるのである。

10.3.8 矩形関数（パルス波）のフーリエ変換

矩形関数とは、ある区間だけ 1 であり、それ以外の区間では 0 となる関数として定義される（パルス波の表現である）。区間を原点で対称としても一般性は損なわれないから、この矩形関数を次の様にあらわす（ d は正の定数）：

$$r(x) = \begin{cases} 1 & -d \leq x \leq d, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この関数をフーリエ変換してみる。 $r(x)=0$ の区間は積分に寄与しないから、

$$F_{r(x)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} r(x) dx = \int_{-d}^d e^{-i\lambda x} r(x) dx = \int_{-d}^d e^{-i\lambda x} dx$$

である。まず $\lambda = 0$ の場合は、

$$F_{r(x)}(0) = \int_{-d}^d dx = 2d$$

であり、 $\lambda \neq 0$ の場合は、普通に積分して、

$$F_{r(x)}(\lambda) = \int_{-d}^d e^{-i\lambda x} dx = \left[\frac{1}{-i\lambda} e^{-i\lambda x} \right]_{-d}^d = \frac{1}{-i\lambda} (e^{-i\lambda d} - e^{i\lambda d}) = \frac{1}{-i\lambda} \cdot (-2i \cdot \sin(\lambda d)) = \frac{2}{\lambda} \sin(\lambda d).$$

さて、ここで

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda d)}{\lambda d} = 1$$

という数学的事実を利用してまとめてあらわすと⁵、

$$F_{r(x)}(\lambda) = 2d \cdot \frac{\sin(\lambda d)}{\lambda d} := 2d \cdot \text{sinc}(\lambda d).$$

簡単には想像がつかない関数形なので、 $d = 3$ の場合のグラフを描いてみよう (図 10.4) .

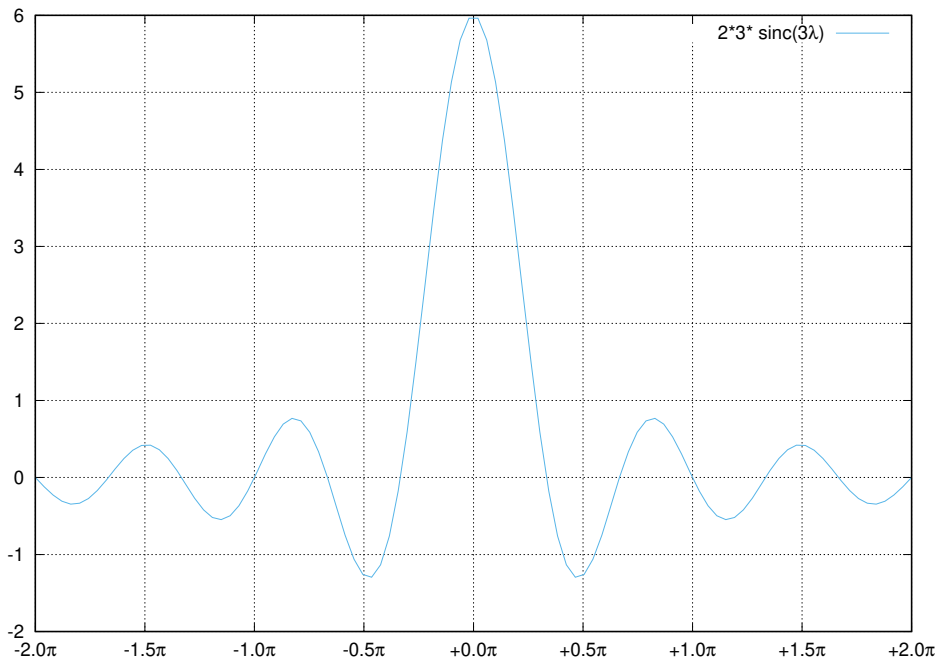


図 10.4: $2d \cdot \text{sinc}(\lambda d)$ で $d = 3$ の時のグラフ

スペクトル分解の形式は次の通り :

$$|r(x)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2d \cdot \text{sinc}(\lambda d) |e^{i\lambda x}\rangle d\lambda.$$

ここでフーリエ逆変換で元の関数にきちんと戻るかどうかが、確認してみよう。以下 $-d \leq x \leq d$ の定義域のみで考える。また実際の計算においては sinc 関数をもちいるよりも指数関数の方が取り扱いが良い (と思われる) ので、フーリエ変換を書き直しておく

$$F_{r(x)}(\lambda) = 2d \cdot \text{sinc}(\lambda d) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda} \cdot \sin(\lambda d) = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{i\lambda d} - e^{-i\lambda d}) & (\lambda \neq 0) \\ 2d & (\lambda = 0). \end{cases}$$

⁵よく利用される関数なので、 sinc (関数) という名称がついている。

‡ ストレートフォワード

スペクトル分解の関数表現は,

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \cdot F_{r(x)}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} (e^{i\lambda d} - e^{-i\lambda d}) \frac{1}{\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda(x+d)} - e^{i\lambda(x-d)}) \frac{1}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(x+d)}}{\lambda} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(x-d)}}{\lambda} d\lambda \\ &=: I_+ - I_- \end{aligned}$$

と変形できる。さてここで、次の定理がある⁶:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda K}}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} i\pi & K > 0 \\ -i\pi & K < 0. \end{cases}$$

この定理の結果を用いて場合分けの表を作ってみよう。

x	...	$-d$...	d	...
$x+d$	-	0	+	$2d$	+
$x-d$	-	$-2d$	-	0	+
I_+	$-1/2$	undef	$1/2$	$1/2$	$1/2$
I_-	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	undef	$1/2$
$I_+ - I_-$	0	undef	1	undef	0

したがって、 $-d < x < d$ の範囲で $r(x) = 1$ であり、それ以外では 0 である。これでほぼ最初の $r(x)$ に戻った。半分めでたい。

めでたさが半分な理由は、定義域が最後になって異なって来たところにある。大勢に大きな影響はないが、なんとなく気持ち悪い。そもそもあらかじめ $-d < x < d$ として $r(x)$ を定義することにし、 \int_{-d}^d を $\int_{-(d-\epsilon)}^{d-\epsilon}$ として極限操作を取るという手もあるのかもしれない⁷。

‡ マジック

フーリエ変換の式

$$F_{r(x)}(\lambda) = \int_{-d}^d e^{-i\lambda x} dx$$

において、この積分は δ 関数と見て取れなくもない⁸。よって大胆にそれを持ちいると、

$$F_{r(x)}(\lambda) = \begin{cases} 2\pi\delta(\lambda) & (-d \leq x \leq d) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

したがって、フーリエ逆変換は、

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \cdot F_{r(x)}(\lambda) d\lambda$$

⁶不完全な証明を付録 A.3 (p.84) に記した。

⁷ $K=0$ ならば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda K}/\lambda d\lambda = 0$ と天下りの的に決めたくもなるが、それでは上述した表にあてはめてもうまくいかない。そもそもこの積分に関してそれはあり得ない。付録 A.3 (p.84) に一応記した。

⁸これは許されるか？

であるが、 $-d \leq x \leq d$ の時、

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \cdot F_{r(x)}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \delta(\lambda) d\lambda = 1$$

であり、それ以外のときはフーリエ変換も 0 であるので、

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \cdot F_{r(x)}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \cdot 0 d\lambda = 0$$

となる。あらまゝ簡単なことで、

10.3.9 ガウス関数のフーリエ変換

ガウス⁹関数

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (\text{where } a > 0)$$

のフーリエ変換の具体的な形をもとめよう。解析的計算テクニック満載である。まずフーリエ変換の基本から始める。フーリエ変換は

$$F[e^{-ax^2}](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-ax^2} dx$$

である。これを λ で微分する。10.3.2 でみたフーリエ変換の微分の性質を用いれば、

$$\frac{d}{d\lambda} F[e^{-ax^2}](\lambda) = -i F[xe^{-ax^2}](\lambda) = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} x e^{-ax^2} dx$$

最後の積分を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} x e^{-ax^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \right) dx \\ &= \left[e^{-i\lambda x} \left(-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\lambda) e^{-i\lambda x} \left(-\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \right) dx \\ &= -\frac{i\lambda}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-ax^2} dx = -\frac{i\lambda}{2a} F[e^{-ax^2}](\lambda) \end{aligned}$$

となるので、フーリエ変換の微分は

$$\frac{d}{d\lambda} F[e^{-ax^2}](\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} F[e^{-ax^2}](\lambda)$$

となる。以下煩雑を避けるため $F(\lambda) := F[e^{-ax^2}](\lambda)$ としよう。これを用いて書き直せば、対数関数の微分形式¹⁰を応用して

$$\frac{d}{d\lambda} F(\lambda) = -\frac{\lambda}{2a} F(\lambda) \iff \frac{\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}}{F(\lambda)} = -\frac{\lambda}{2a} \iff \frac{d \log F(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{2a}$$

⁹Carolus Fridericus Gauss

¹⁰復習しておこう。まず $d \log x / dx = 1/x$ を押さえておく。ここで合成関数の微分の chain rule で

$$\frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{d \log f(x)}{df(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \iff d \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

となる。あとはこれを不定積分すれば

$$\log f(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + C \quad (C \text{ は任意積分定数})$$

ともとまる。

となるから、不定積分して対数をほどけば（任意積分定数を C, D とする），

$$\log F(\lambda) = \int -\frac{\lambda}{2a} d\lambda + C = -\frac{\lambda^2}{4a} + C \iff F(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4a} + C\right) =: D \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4a}\right)$$

となる．これより， $F(0) = D$ も明らかである． $F(0)$ は，もともとのフーリエ変換に戻れば，

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

である．ここで 2 重積分と極座標のテクニックを使う．

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

とすれば，この微分と面積要素微分 $dx dy$ は

$$dx = dr \cos \theta - d\theta r \sin \theta$$

$$dy = dr \sin \theta + d\theta r \cos \theta$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

となり¹¹，積分範囲の対応は

$$\begin{cases} x: -\infty \rightarrow \infty \\ y: -\infty \rightarrow \infty \end{cases} \implies \begin{cases} r: 0 \rightarrow \infty \\ \theta: 0 \rightarrow 2\pi \end{cases}$$

となる．これらの結果を踏まえると，

$$\begin{aligned} F(0)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr \cdot 2\pi = 2\pi \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

となる． $F(0)$ はその関数形から $F(0) > 0$ であることがわかるので，結局 $F(0) = \sqrt{\pi/a}$ となって

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{1}{4a} \lambda^2\right)$$

となる．ガウス関数のフーリエ変換もまたガウス関数なのである．

¹¹面積要素微分は，ヤコビ (Carl Gustav Jacob Jacobi) 行列式の理論から持ってきてもいいし，地道な計算を行って求めてもよい．その地道な計算では，次のようになる．ただし，面積要素微分は掛け算の順序交換に法則があるので（外微分形式というものだったはず），まず，微分の順序は変えないで実行しなければならない．そして同一微分の 2 次のオーダーは無視して構わないから，

$$\begin{aligned} dx dy &= (dr \cos \theta - d\theta r \sin \theta)(dr \sin \theta + d\theta r \cos \theta) \\ &= (dr)^2 \cos \theta \sin \theta + dr d\theta \cdot r \cos^2 \theta - d\theta dr \cdot r \sin^2 \theta - (d\theta)^2 r \sin \theta \cos \theta \\ &= dr d\theta \cdot r \cos^2 \theta - d\theta dr \cdot r \sin^2 \theta \end{aligned}$$

であり，微分の順序を変えると符号が変わる，つまり $d\theta dr = -dr d\theta$ なので（外微分形式の演算規則），結果

$$dx dy = dr d\theta \cdot r \cos^2 \theta + dr d\theta \cdot r \sin^2 \theta = dr d\theta \cdot r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \cdot dr d\theta$$

となる．

10.4 離散フーリエ変換編

10.4.1 $\sqrt{2}((n \bmod 8) + 1)\sin((\pi/4) \cdot n)$ の離散フーリエ変換

$$f(n) = \sqrt{2}((n \bmod 8) + 1)\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

なる周期的離散変数関数¹²の離散フーリエ変換をもとめよう。この $f(n)$ の定義から明らかなように、

$$\begin{aligned} \text{周期} & : 2\pi \\ \text{サンプリング間隔} & : \tau = \pi/4 \\ \text{1 周期内のサンプリング個数} & : N = 8 \end{aligned}$$

である。離散フーリエ変換を行列であらわすと、

$$\vec{F} = \frac{1}{N} M \vec{f}$$

であった。最初に \vec{f} を具体的に記そう。関数を計算して次の列ベクトルを得る：

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3\sqrt{2} \\ 4 \\ 0 \\ -6 \\ -7\sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix}.$$

M は、かづくで書けば

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (\zeta_8^*)^1 & (\zeta_8^*)^2 & (\zeta_8^*)^3 & (\zeta_8^*)^4 & (\zeta_8^*)^5 & (\zeta_8^*)^6 & (\zeta_8^*)^7 \\ 1 & (\zeta_8^*)^2 & (\zeta_8^*)^4 & (\zeta_8^*)^6 & (\zeta_8^*)^8 & (\zeta_8^*)^{10} & (\zeta_8^*)^{12} & (\zeta_8^*)^{14} \\ 1 & (\zeta_8^*)^3 & (\zeta_8^*)^6 & (\zeta_8^*)^9 & (\zeta_8^*)^{12} & (\zeta_8^*)^{15} & (\zeta_8^*)^{18} & (\zeta_8^*)^{21} \\ 1 & (\zeta_8^*)^4 & (\zeta_8^*)^8 & (\zeta_8^*)^{12} & (\zeta_8^*)^{16} & (\zeta_8^*)^{20} & (\zeta_8^*)^{24} & (\zeta_8^*)^{28} \\ 1 & (\zeta_8^*)^5 & (\zeta_8^*)^{10} & (\zeta_8^*)^{15} & (\zeta_8^*)^{20} & (\zeta_8^*)^{25} & (\zeta_8^*)^{30} & (\zeta_8^*)^{35} \\ 1 & (\zeta_8^*)^6 & (\zeta_8^*)^{12} & (\zeta_8^*)^{18} & (\zeta_8^*)^{24} & (\zeta_8^*)^{30} & (\zeta_8^*)^{36} & (\zeta_8^*)^{42} \\ 1 & (\zeta_8^*)^7 & (\zeta_8^*)^{14} & (\zeta_8^*)^{21} & (\zeta_8^*)^{28} & (\zeta_8^*)^{35} & (\zeta_8^*)^{42} & (\zeta_8^*)^{49} \end{pmatrix}$$

となる。しかしあまりにもかづくなので、もうすこし見通しよくしてみよう。 $\zeta_8^* = e^{-i\pi/4}$ であったから、周期 2π つまり指数の肩が 2π の整数倍増えても同じ値となる。つまり k を自然数として、 $(\zeta_8^*)^k = e^{-i\pi k/4}$ において、

$$R = \frac{k}{4} \bmod 2 \iff R = k \bmod 8$$

¹²離散フーリエ変換の計算のために人工的に作った関数である。

でグルーピングされたものはすべて同じ値になる。よって指数の肩を $R \pmod{\text{演算}}$ の結果にすると,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (\xi_8^*)^1 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^3 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^5 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^7 \\ 1 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^0 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^6 \\ 1 & (\xi_8^*)^3 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^1 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^7 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^5 \\ 1 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^0 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^0 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^0 & (\xi_8^*)^4 \\ 1 & (\xi_8^*)^5 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^7 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^1 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^3 \\ 1 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^0 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^2 \\ 1 & (\xi_8^*)^7 & (\xi_8^*)^6 & (\xi_8^*)^5 & (\xi_8^*)^4 & (\xi_8^*)^3 & (\xi_8^*)^2 & (\xi_8^*)^1 \end{pmatrix}$$

となる。おのおの要素を具体的に書き、以下のように Z を代用すると,

$$\begin{aligned} (\xi_8^*)^0 &= 1 \\ (\xi_8^*)^1 &= e^{-i\frac{1}{4}\pi} =: Z \\ (\xi_8^*)^2 &= e^{-i\frac{2}{4}\pi} = -i \\ (\xi_8^*)^3 &= e^{-i\frac{3}{4}\pi} = e^{-i\frac{1}{4}\pi} e^{-i\frac{2}{4}\pi} = -ie^{-i\frac{1}{4}\pi} = -iZ \\ (\xi_8^*)^4 &= e^{-i\frac{4}{4}\pi} = -1 \\ (\xi_8^*)^5 &= e^{-i\frac{5}{4}\pi} = e^{-i\frac{1}{4}\pi} e^{-i\frac{4}{4}\pi} = -e^{-i\frac{1}{4}\pi} = -Z \\ (\xi_8^*)^6 &= e^{-i\frac{6}{4}\pi} = i \\ (\xi_8^*)^7 &= e^{-i\frac{7}{4}\pi} = e^{-i\frac{1}{4}\pi} e^{-i\frac{6}{4}\pi} = ie^{-i\frac{1}{4}\pi} = iZ \end{aligned}$$

なので,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & Z & -i & -iZ & -1 & -Z & i & iZ \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -iZ & i & Z & -1 & iZ & -i & -Z \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -Z & -i & iZ & -1 & Z & i & -iZ \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & iZ & i & -Z & -1 & -iZ & -i & Z \end{pmatrix}$$

となる (対称行列にもなっている)。よって

$$M\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & Z & -i & -iZ & -1 & -Z & i & iZ \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -iZ & i & Z & -1 & iZ & -i & -Z \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -Z & -i & iZ & -1 & Z & i & -iZ \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & iZ & i & -Z & -1 & -iZ & -i & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3\sqrt{2} \\ 4 \\ 0 \\ -6 \\ -7\sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-4\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2}i+8Z-12iZ \\ 4\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2}i+12Z-8iZ \\ 8-4\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2}i-8Z+12iZ \\ 4\sqrt{2} \\ 10\sqrt{2}i-12Z+8iZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-4\sqrt{2} \\ (-2-20i)\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 8-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ (-2+20i)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と求まる。結果離散フーリエ変換の列ベクトルは、

$$\vec{F} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -8-4\sqrt{2} \\ (-2-20i)\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 8-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ (-2+20i)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる。

フーリエ逆変換の方も確認しておこう。

$$\vec{f} = L\vec{F}, \quad L = M^\dagger$$

であった。Lは

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & Z^* & i & iZ^* & -1 & -Z^* & -i & -iZ^* \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & iZ^* & -i & Z^* & -1 & -iZ^* & i & -Z^* \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -Z^* & i & -iZ^* & -1 & Z^* & -i & iZ^* \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -iZ^* & -i & -Z^* & -1 & iZ^* & i & Z^* \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \vec{f} = L\vec{F} &= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & Z^* & i & iZ^* & -1 & -Z^* & -i & -iZ^* \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & iZ^* & -i & Z^* & -1 & -iZ^* & i & -Z^* \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -Z^* & i & -iZ^* & -1 & Z^* & -i & iZ^* \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -iZ^* & -i & -Z^* & -1 & iZ^* & i & Z^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8-4\sqrt{2} \\ (-2-20i)\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 8-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ (-2+20i)\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2+2\sqrt{2}Z^* - 2\sqrt{2}iZ^* \\ 3\sqrt{2} \\ -2+3\sqrt{2}Z^* - 3\sqrt{2}iZ^* \\ 0 \\ -2-2\sqrt{2}Z^* + 2\sqrt{2}iZ^* \\ -7\sqrt{2} \\ -2-3\sqrt{2}Z^* + 3\sqrt{2}iZ^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3\sqrt{2} \\ 4 \\ 0 \\ -6 \\ -7\sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ときちんと元にもどるのであるが、いやあ筆算でこれをやるのは実に大変ではある¹³。

¹³ここに、octave をもちいての離散フーリエ変換の結果を記しておこう。プログラムは非常に簡単で、

```
#!/usr/bin/env octave
x = [0, 2, 3*sqrt(2), 4, 0, -6, -7*sqrt(2), -8];
fft(x)/8
```

である。ただし、Octave では $1/N$ の係数は逆変換の方に付くようだ。よってここでは `fft` の結果を 8 で割っている。結果は次のようになる。

```
ans =
Columns 1 through 3:
-1.70711 + 0.00000i  -0.35355 - 3.53553i   0.70711 + 0.00000i

Columns 4 through 6:
 0.35355 + 0.00000i   0.29289 + 0.00000i   0.35355 - 0.00000i

Columns 7 and 8:
 0.70711 - 0.00000i  -0.35355 + 3.53553i
```

電卓で検算するとよろしい。

第11章 サンプリング定理

サンプリングしたデータからその元になる関数が導出できるか？それに答えるものがこのサンプリング定理¹
²である。もちろん無条件にできるわけではなく、ある一定の条件がつく。元の関数を導出するにはサンプリング間隔はどうあるべきか、という問いとその答えがこの定理の中心である。物理的な実在としての信号処理系をあつかってこの定理を見ていく。

11.1 信号処理系の用語

今までは変数 x や λ などにあえて意味を持たせず、無味乾燥的なものとして扱ってきた。ここでは物理的な対象として信号処理系をあつかってみることにしよう。物理の波動関連の用語が、信号処理系でも使われる（電気工学系もおそらく同様だろう）。それを復習しておこう。

まず基本的なこととして、時間を実数 t であらわすことにする。実数であるということは厳密に言えば仮定であろう。とにかくそう仮定し、時間を連続量であるものとする。

次に何か t にたいして周期的である場合を考える。その時間周期を T としよう。もちろん T は様々な値をもつ。「周波数（振動数ともいう）」とは、単位時間あたりの周期の個数、つまり単位時間あたりに何周期あるかというものであると決める。「波動的」に言えば、単位時間に波がいくつあるかということである。この単位時間に 1 を使うものをそのまま「周波数（振動数）」といい、 2π を使うものを角周波数（角振動数）と言う。したがって、 T が決まれば周波数も決まる。それを

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

などとあらわす^{3 4}。

¹ナイキスト定理、ナイキスト・シャノンの定理、シャノン・染谷の定理とも呼ばれるらしい。

²応用例として CD があげられるらしい。音楽のアナログ信号（元の関数型）を適当にサンプリングし（デジタル化）、そのサンプリングされたデジタルデータから元の音楽を再現するという方法のようだ。その基盤になるのがこのサンプリング定理であろう。もちろんそこにはどの程度でサンプリングするかという問題が残っている。

³日常的な単位では、時間の単位は通常「秒」である。周期を秒であらわす場合、1 単位あたりの周期の数である周波数（振動数）に Hz（ヘルツ）という単位をつけた（次元は [1/s] である）。FM ラジオや TV など使われているものは 30 MHz~300 MHz の周波数（振動数）らしい。ややこしいが、「周波数」の場合「周波」と呼ぶこともある。曰く「高周波」「低周波」などである。CPU の性能も Hz で語られることが多い。これはクロック信号の周波数（振動数）のことである。

信号処理系ではあまり用いられないが、物理の波動では波長を用いてもあらわす。波の位相速度を v とすると、1 周期で進む距離（波長 λ ）は $\lambda = vT$ である。よって振動数は $\nu = 1/T = v/\lambda$ 、角振動数は $\omega = 2\pi\nu/\lambda$ である。そしてここから「波数」という概念が生まれてくる。通常はそれは単位距離あたりの波の個数で、単位を 2π にしたとき $k = 2\pi/\lambda$ であらわされる。よって角周波数も $\omega = kv$ とあらわされる。上でもちいた周波数帯 30 MHz~300 MHz の例に関して言えば、電磁波であるので速度は光速。したがって、波長は 10m~1m となる。つまり波長が短いほど高周波。波動については付録 D で簡単にまとめてみた。

⁴本書でいままですってきた変数との対応が

$$\begin{array}{l} x \longleftrightarrow t \\ \lambda \longleftrightarrow \omega \end{array}$$

であることは言うまでもない。さらに、付け加えれば基底ベクトルが $|e^{i\omega t}\rangle$ になり、作用素は $\hat{H} = -id/dt$ で、基底ベクトルの固有値が ω となっている。

11.2 問題の設定

信号処理系におけるデータを何らかの手段で測定しているとしよう。ただしこの測定にはひとつ条件があって、測定の時間間隔は一定

というものが課せられる。つまり測定されたものはサンプリングデータでなければならないということだ⁵。時刻 t_j の測定データを x_j とあらわそう：

$$\begin{aligned} t_0 &\mapsto x_0 \\ t_1 &\mapsto x_1 \\ &\vdots \\ t_j &\mapsto x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

サンプリングデータという条件は、一定な時間間隔を τ として、

$$t_{j+1} - t_j = \tau \quad (\text{const.})$$

とあらわせる。

解きたい「問題」は、この測定データの集合から、その背後にあるであろう t と x の関係、つまり関数型 $x(t)$ を見いだせないか、ということである。一般的に考えれば、上記の測定データの関係を満たすものは複数、いや、無数にあると想像できる。しかしながら、ある条件のもとではその関数型が一意に同定できるのである。フーリエ解析をもちいてこの事実を示すものが、この章で述べるサンプリング定理である。

11.3 サンプリング離散変数関数フーリエ変換による道具立て

まずもって、まだその実体はわからないけれども、 $x(t)$ が存在しているとしよう。この $x(t)$ にはいまのところなんの制限もない。そしてこの $x(t)$ をフーリエ変換したものを $X(\omega)$ と表すことにする。連続固有値を ω としてスペクトル分解を行えば、

$$\begin{aligned} |x(t)\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\omega t}\rangle \langle e^{i\omega t} | x(t)\rangle d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\omega t}\rangle X(\omega) d\omega \iff x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} X(\omega) d\omega \\ X(\omega) &= \langle e^{i\omega t} | x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) dx \end{aligned}$$

となるのは今まで通りである。

さてここで、 $x(t)$ をサンプリング間隔 τ でサンプリングしたもの、つまり、サンプリング離散変数関数化（この場合は離散時間化とも言えよう）したものを $x_s(t)$ とあらわそう⁶。離散時間を j を整数として $t_j = j\tau$ と表せば、 $x_s(t)$ は

$$x_s(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \delta(t - t_j) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) \delta(t - j\tau)$$

⁵なにかを測定するばあい、実際には「1秒ごとの値」などを用いることが多いとおもう。つまりサンプリングデータの収集となっている。

⁶これはサンプリング間隔が周期的なのであって、 $x(t)$ それ自体が周期関数ではない、ということを再度確認しておこう。

となる。そしてこの $x_s(t)$ をフーリエ変換したものを $X_s(\omega)$ とし、それを計算してみよう。第 6 章『離散変数関数のフーリエ変換』でみたように、それは

$$X_s(\omega) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) e^{-i\omega t_j} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) e^{-i\omega j\tau}$$

と求まり、サンプリング離散変数であるので、角周波数 $2\pi/\tau$ の周期関数となるのだった。

もとの関数とそのフーリエ変換、サンプリングによる離散時間化した関数とそのフーリエ変換の対比をまとめてみよう：

$$\begin{cases} x(t), \\ X(\omega) = F[x(t)](\omega) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_s(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) \delta(t - j\tau), \\ X_s(\omega) = F[x_s(t)](\omega) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) e^{-i\omega j\tau}. \end{cases}$$

11.4 解法の戦略

さて、何をしたいのか、いま一度考えてみよう。我々が手にしているものは、サンプリングで離散化されたデータ、つまり $x_s(t)$ である。そして求めたいものは $x(t)$ である。 $x_s(t)$ から $X_s(\omega)$ は導出可能。さらに $X(\omega)$ から $x(t)$ はフーリエ逆変換を用いれば導出可能。ということで、 $X_s(\omega)$ から $X(\omega)$ が求まれば、いや、そこまです高望みしなくても $X_s(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係性が求まればいろいろ打つ手はありそうである。まずこの点に絞って議論を進めていこう⁷。

11.4.1 $X_s(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係

$X_s(\omega)$ の導出をもう一度丁寧に見直してみる。まず $x_s(t)$ である。離散変数関数のフーリエ変換のところで見たように、 δ 関数の性質を利用すれば、

$$x_s(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) \delta(t - j\tau) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t) \delta(t - j\tau) = x(t) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau)$$

とあらわせる。したがってそのフーリエ変換 $X_s(\omega)$ は

$$X_s(\omega) = F \left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t) \delta(t - j\tau) \right] (\omega) = F \left[x(t) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau) \right] (\omega)$$

となる。ここで、9.3 節で見たように、積のフーリエ変換はフーリエ変換の合成積であるから

$$X_s(\omega) = F \left[x(t) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau) \right] (\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot F[x(t)](\omega) * F \left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau) \right] (\omega)$$

とフーリエ変換が分解できる。

計算を進めよう。まず、 $F[x(t)](\omega) = X(\omega)$ であった。ついで、 $F \left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau) \right] (\omega)$ は 10.3.7 節で計算した楕円関数のフーリエ変換である⁸。それを適用すると、

$$F \left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau) \right] (\omega) = \Omega \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(\omega - k\Omega)$$

⁷この戦略は、参考文献 [3] から学んだ。

⁸サンプリング離散変数関数であるから、楕円関数になるのである。ただの離散変数化であつたらこうはいかない。

となる。ただし、 $\Omega = 2\pi/\tau$ とおいた。これより、

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) * \Omega \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(\omega - k\Omega)$$

がわかった。あとは合成積を計算する。計算のみとおしをよくするために、 $\delta_{k\Omega}(\omega) := \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(\omega - k\Omega)$ としよう。そして合成積の順番も入れ替える。すると

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \frac{\Omega}{2\pi} \cdot \delta_{k\Omega}(\omega) * X(\omega) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{k\Omega}(p) X(\omega - p) dp \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(p - k\Omega) X(\omega - p) dp = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p - k\Omega) X(\omega - p) dp \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} X(\omega - k\Omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} X(\omega - k\Omega) \end{aligned}$$

と求まる。 $X_s(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係が導出できたのである。

さてこの和は何を意味しているか？各項をみてみると、たとえば $k=0$ の時は $X(\omega)$ 、 $k=1$ の時は $X(\omega - \Omega)$ 、 $k=-1$ の時は $X(\omega + \Omega)$ 、 $k=2$ の時は $X(\omega - 2\Omega)$ 、 $k=-2$ の時は $X(\omega + 2\Omega)$ となるから、 $X(\omega)$ を正負両方の方向に Ω ずつずらしたもののあつまりである。言い換えれば、 $X(\omega)$ を「ユニット」としてそれが Ω ずつずれて連なりあっているものなのである。

11.4.2 帯域の制限

$X_s(\omega) = (1/\tau) \sum_{k \in \mathbf{Z}} X(\omega - k\Omega)$ のイメージをつかもう。まだ $X(\omega)$ の関数型はわからないので、そこは適当にする。ここで

$X(\omega)$ がある一定の ω の範囲（範囲幅 W ）でのみ値を持ち、その他は 0 である

と仮定しよう。角周波数に課すこの条件を「帯域制限」といい、この W を「帯域制限幅」という。角周波数の関数が値をもつ領域が制限される、という事柄をあらわしている。この帯域制限の仮定の下で、「 $k\Omega$ によるずれ」をみるために、 $k=0, k=1, k=-1$ の場合を取り上げて、 $W < \Omega$ の場合についてグラフに描いてみる（図 11.1）。このグラフから分かるように、 $W > \Omega$ の場合は、各 $X(\omega - k\Omega)$ の波は重りあう。複数の波が重複

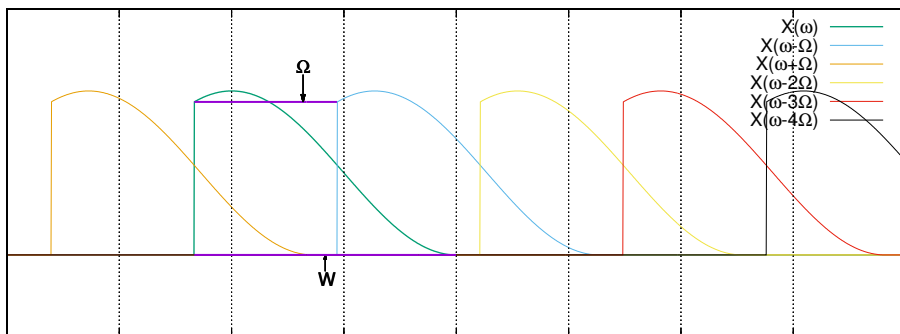


図 11.1: $X(\omega)$ のサンプルグラフその 1

してしまう領域があるのだ。他方、 $W < \Omega$ の場合は図 11.2 のようになる。この場合は波が重ならない。

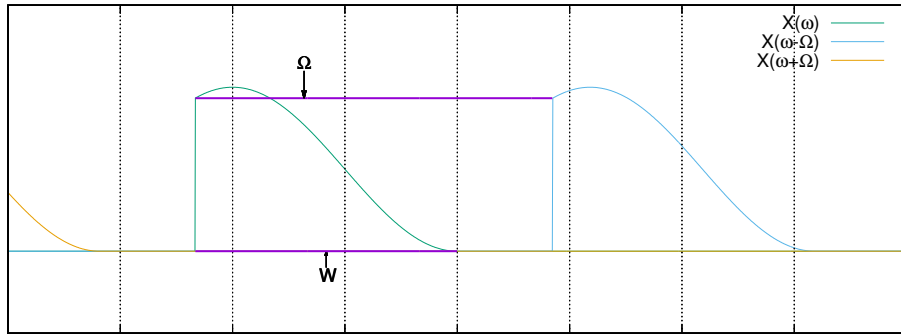


図 11.2: $X(\omega)$ のサンプルグラフその 2

われわれが求めたいのは $X(\omega)$ であった。したがって、それが他の $X(\omega - k\Omega)$ と重ね合わさっていてはちよつと困る。なので重ね合わさらないようにしたい。そしてそのための条件は、

$$W \leq \Omega$$

となる。つまり「帯域制限幅 W が Ω 以下であれば重ならない」という事実が導けたのである。

角周波数には正負も考慮することを念頭におき、対称性を考慮してこの帯域制限の条件を

$$X(\omega) = \begin{cases} \text{somevalue} & \left(-\frac{W}{2} \leq \omega \leq \frac{W}{2}\right), \\ 0 & \text{otherwise} \iff \frac{W}{2} < |\omega|. \end{cases}$$

とあらわそう。さてこの帯域制限の条件

$$X(\omega) = 0 \quad \text{where} \quad \frac{W}{2} < |\omega|$$

の意味を考えてみよう。これはしきい値 $W/2$ より周波数の高い部分をオミットすることと等しい。 $X(\omega)$ にたいして、「高周波」の部分を持ち捨てるという操作を施すものと考えられる。信号処理的には、その逆を言って、しきい値 $W/2$ 以下の周波数を取り出すので、「ローパスフィルタ」と呼ぶようである。「ローパスフィルタをかけて、帯域制限をする」と使われるようだ⁹

11.4.3 $X(\omega)$ をバイパスした $x(t)$ の導出

波が重ならない条件 $W \leq \Omega$ を課す事によって、 $X(\omega)$ に制限がつけられた。ここから $X(\omega)$ が具体的にもとまればそれに越したことはないのであるが、我々の本来の目論見は $x(t)$ を求めることであった。よって、フーリエ変換の対称性を利用して、 $X(\omega)$ の実体をもとめずに $x(t)$ の導出を計算していこう。まずスタートポイントはさきに求めた

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} X(\omega - k\Omega)$$

である。帯域制限（ローパスフィルター）は矩形関数

$$r(\omega) = \begin{cases} 1 & -\frac{W}{2} \leq \omega \leq \frac{W}{2}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

⁹ 11.4.4 でそこらへんの言葉の使いかを再度まとめた。筆者自身は少なからずまごついた。

を用いて表現できる。そして計算のためにこれを τ 倍したものを

$$H(\omega) = \tau \cdot r(\omega) = \begin{cases} \tau & -\frac{W}{2} \leq \omega \leq \frac{W}{2}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする。 $X_s(\omega)$ にこの $H(\omega)$ をかけると、和の部分から $k=0$ のものである $X(\omega)$ が得られる。つまり、

$$X(\omega) = H(\omega)X_s(\omega)$$

となる。これを ω の空間で両辺をフーリエ変換し、その結果を

$$G_X(t) = G_{HX_s}(t)$$

とおこう。フーリエ変換の対称性から

$$G_X(t) = 2\pi x(-t)$$

である。一方積のフーリエ変換はフーリエ変換の合成積であったから、

$$G_{HX_s}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot G_H(t) * G_{X_s}(t)$$

となる。まず $G_H(t)$ を計算する。これは矩形関数のフーリエ変換に他ならないから、先の事実 (10.3.8) より

$$G_H(t) = \tau W \cdot \text{sinc}\left(\frac{W}{2}t\right)$$

である¹⁰。 $G_{X_s}(t)$ はフーリエ変換の対称性から¹¹

$$G_{X_s}(t) = 2\pi x_s(-t) = 2\pi \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \delta(-t - t_j) = 2\pi \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \delta(t + t_j) \quad (\delta \text{ 関数の偶関数性を利用})$$

これで $G_H(t), G_{X_s}(t)$ が求まった。残るは合成積の計算である。わかりやすいように合成積の順番を入れ替えて計算しよう。

$$\begin{aligned} G_{HX_s}(t) &= \frac{1}{2\pi} G_H(t) * G_{X_s}(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} G_{X_s}(t) * G_H(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\pi \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \delta(p + t_j) \right\} \left\{ \tau W \cdot \text{sinc}\left(\frac{W}{2}(t-p)\right) \right\} dp \\ &= \tau W \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p + t_j) \text{sinc}\left(\frac{W}{2}(t-p)\right) dp \\ &= \tau W \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \text{sinc}\left(\frac{W}{2}(t+t_j)\right). \end{aligned}$$

¹⁰ 復習のために実際に積分もしておこう。

$$G_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} H(\omega) d\omega = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} e^{-it\omega} \tau d\omega \quad (\omega \text{ の帯域制限から積分が絞れる})$$

$t=0$ の時 $G_H(0) = \tau W$ は明らか。 $t \neq 0$ の時

$$G_H(t) = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} e^{-it\omega} \tau d\omega = \left[\frac{1}{-it} \tau e^{-it\omega} \right]_{\omega=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} = \frac{\tau}{-it} \left\{ e^{-it\frac{W}{2}} - e^{it\frac{W}{2}} \right\} = \frac{\tau}{-it} \left(-2i \cdot \sin\left(\frac{W}{2}t\right) \right) = \frac{2\tau}{t} \cdot \sin\left(\frac{W}{2}t\right)$$

$t=0, t \neq 0$ の場合をまとめて上記の $G_H(t)$ を得る。

¹¹ ここでも実際に積分もしておこう。

$$G_{X_s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} X_s(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-it\omega} \left\{ \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) e^{-it_j\omega} \right\} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(t+t_j)\omega} = 2\pi \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \delta(t+t_j)$$

またそもそも

$$G_X(t) = G_{HX_s}(t), \quad G_X(t) = 2\pi x(-t)$$

だったから、

$$\begin{aligned} 2\pi x(-t) = \tau W \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{2}(t+t_j)\right) &\iff x(-t) = \frac{\tau W}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{2}(t+t_j)\right) \\ &\iff x(t) = \frac{\tau W}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{2}(-t+t_j)\right) \quad (t := -t) \\ &\iff x(t) = \frac{\tau W}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(t_j) \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{2}(t-t_j)\right) \quad (\operatorname{sinc} \text{ 関数は偶関数}) \end{aligned}$$

と $x(t)$ が求まってきたのである。

11.4.4 信号処理系の用語再び

ここまでの議論で用いてきた量は、まず「サンプリング間隔 τ 」であった。そして「帯域制限幅 W 」というものを導入した。その時 $X(\omega)$ が取り出せる条件は

$$W \leq \frac{2\pi}{\tau}$$

であった。そしてこれを満たす W に対して、正負の角周波数を考慮して対称的にすることにより「帯域制限条件」を

$$X(\omega) = 0 \quad \text{where} \quad \frac{W}{2} < |\omega| \iff \omega < -\frac{W}{2}, \frac{W}{2} < \omega$$

と記した。この帯域制限条件を、絶対値の働きを尊重して「帯域が $W/2$ に制限されている」というふうにも言うようだ。「帯域制限幅が $W/2$ 」とも言われることもあるので少なからずまごつく。またその動作に着目して「帯域制限 $W/2$ のローパスフィルタをかける」とも言われる。

さらに先の条件 $W \leq 2\pi/\tau$ で不等号がちょうど等号になる場合の τ をナイキスト間隔と呼ぶ。それを τ_N とすれば、

$$\tau_N = \frac{2\pi}{W}$$

さらに、 $2\pi/\tau$ を「サンプリング角周波数」という。これらをあわせて、たとえば、

サンプリング間隔をナイキスト間隔以下にすれば $X(\omega)$ が取り出せる、つまり、サンプリング定理が成り立つ

ともいう。または、

帯域が $W/2$ に制限されている場合には、サンプリング周波数 ($2\pi/\tau$) をその制限帯域の 2 倍にすればよい

と言ったりもする。

求めた $x(t)$ の式に出てくる

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{W}{2}(t-\tau j)\right)$$

をサンプリング関数と呼ぶこともある。この関数の一般的な形には、10.3.8 節のところでも出会った。大雑把なイメージは図 10.4 に記したとおりである。

11.5 理路の整理

これまでの議論を整理してみよう。まず前提条件と目的を記すと、

前提条件 : 求めたい関数 $x(t)$ に関して、そのサンプリングデータがある (サンプリング間隔 τ)

目的 : $x(t)$ をもとめる。求める際に必要な条件があるのであればそれを導出する

である。そして目的達成のために、道具としてフーリエ解析のもろもろを使ってきた。 $x(t)$ の求め方の戦略の骨子は、 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を求めるというものであった ($X(\omega)$ が求まれば $x(t)$ が求まるということに等しい)。

詳細を見ていこう。まず、サンプリングデータがあるので、サンプリング離散変数関数が求まる。所与のパラメタは τ のみである。

$$x(t) \mapsto x_s(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) \delta(t - j\tau) = x(t) \sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau) \quad (11.5.1)$$

次にこの $x_s(t)$ に離散変数関数のフーリエ変換を施した。結果フーリエ変換に周期性があることが導出された。

$$x_s(t) \mapsto \begin{cases} X_s(\omega) = F[x_s(t)](\omega) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(j\tau) e^{-i\omega j\tau} \\ X_s(\omega) \text{ は周期 } \frac{2\pi}{\tau} \end{cases} \quad (11.5.2)$$

ここで、すでに世界のどこかに存在しているはずの $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を導入する。そしてもとの $x(t)$ の式 (11.5.1) に対してフーリエ変換を施すと、合成積の性質を利用して (さらに $\Omega = 2\pi/\tau$ をほどいて)

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F[x(t)](\omega) * F\left[\sum_{j \in \mathbf{Z}} \delta(t - j\tau)\right](\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{\tau}\right) \quad (11.5.3)$$

$$= \frac{1}{\tau} \sum_{k \in \mathbf{Z}} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{\tau}\right) \quad (11.5.4)$$

となり、 $X_s(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係が導き出される。この関係から

$$X_s(\omega) \text{ は } X(\omega) \text{ を } \frac{2\pi}{\tau} \text{ づつずらしたものの重ね合わせ} \quad (11.5.5)$$

という性質が分かる。ここでまだその実体の知れない $X(\omega)$ であるが、 ω がどこまでいっても (つまり無限大でも) $X(\omega)$ が存在するのでは手に負えない。なのでまず最初の条件をつける。ある正の (角周波数である) W に対して、

$$X(\omega) = 0 \quad \text{where} \quad \frac{W}{2} < |\omega| \quad (11.5.6)$$

とする。いわば $X(\omega)$ の「ユニット化」である。そして $X_s(\omega)$ の周期性をもちいて、重ね合わせの際に $X(\omega)$ のユニットがかぶさらない条件をつける。つまり $X(\omega)$ ユニットの幅が $X_s(\omega)$ の周期以下となれば良い。これが $X(\omega)$ に対する 2 つ目の条件である。すなわち、

$$W \leq \frac{2\pi}{\tau} \quad (11.5.7)$$

この 2 つの条件をまとめて、対称性的に $X(\omega)$ に課すと、

$$\begin{aligned} W \leq \frac{2\pi}{\tau} \text{ をみたす } W \text{ にたいして、} W/2 < |\omega| \text{ の時 } X(\omega) = 0 \text{ となる } X(\omega) \text{ であれば} \\ X_s(\omega) \text{ では } X(\omega) \text{ はかぶさりあわない} \end{aligned} \quad (11.5.8)$$

となる。これが「帯域制限条件」である。そしてこの条件が満たされている $X(\omega)$ のもとで、これをフーリエ逆変換して ($X(\omega)$ の実体を定めずとも)、本来の目的の $x(t)$ が

$$W \leq \frac{2\pi}{\tau},$$

$$x(t) = \frac{\tau W}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(\tau j) \cdot \text{sinc} \left(\frac{W}{2}(t - \tau j) \right) \quad (11.5.9)$$

と導出できてきたのである。 τ と W のみが関わってくるのである。これを標語的にまとめれば、

$x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ において、 $W \leq \frac{2\pi}{\tau}$ をみたす W にたいして、 $\frac{W}{2} < |\omega|$ の時 $X(\omega) = 0$ であれば (帯域制限)

$$x(t) = \frac{\tau W}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x(\tau j) \cdot \text{sinc} \left(\frac{W}{2}(t - \tau j) \right)$$

であたえられる

となる。

サンプリング定理からあたえられた上記の結果を吟味しよう。まず始めに帯域制限幅の値 W がわかっていたとする。たとえばフーリエ変換した結果が計算できて、そこにあらわれる ω の範囲がわかるような場合もそれに含まれるだろう。とにかく、アприオリにその W が与えられていたとしよう。すると W の満たすべき条件から

$$W \leq \frac{2\pi}{\tau} \iff \tau \leq \frac{2\pi}{W}$$

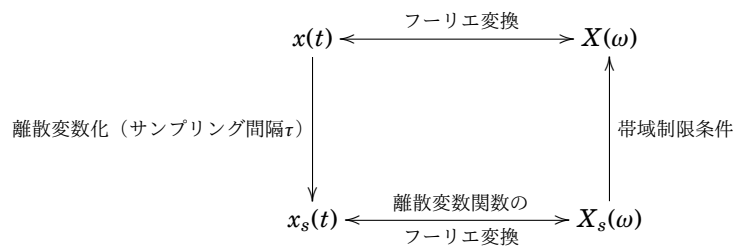
となる。つまりサンプリング間隔の上限が決まり、それより小さい値であれば $x(t)$ が求まるといっているのである。 W が大きいということは $X(\omega)$ の裾野が広いということである¹²。裾野が広い場合はサンプリング間隔を一層細かくしないと求まらない、ということが分かる。逆に言えば、サンプリング間隔 τ が小さければ小さいほど裾野が広がる、つまり、帯域制限幅が広がるということだ。さらに付け加えれば、 W 自身があまり大きくない時は、サンプリング間隔 τ の許容範囲も大きくなる。それなりに大きな値でサンプリングしても良いことになる。

一方、その反対で始めにサンプリング間隔 τ が与えられているとしよう。その時は、少なくとも

$$\frac{W}{2} = \frac{\pi}{\tau} < \omega \implies X(\omega) = 0$$

を確認しないとイケない (確認できるかどうかはともかく)。そしてこれが成り立つ場合に限り、そのサンプリング間隔 τ のもとでサンプリング定理から $x(t)$ が求まるのである。となる。

以上から、この節でまとめた理路の構図をは次の様にまとめられるだろう。



¹² $X(\omega)$ が値を持つ範囲は $-\frac{W}{2\pi} \leq \omega \leq \frac{W}{2\pi}$ であることを思い出そう。

11.6 具体例

11.6.1 三角関数の場合

サンプリング定理の振る舞いを，三角関数をとおして観察してみよう。
 $\cos(t)$ のフーリエ変換は

$$F_{\cos(t)}(\omega) = \pi\delta(\omega - 1) + \pi\delta(\omega + 1)$$

である¹³。精密に考えれば $\omega = \pm 1$ の時にしか値を持たないが，これを $1 < \omega$ や $\omega < -1$ の場合には値がないとも解釈（拡大解釈？）できる。つまり「角周波数は 1 に帯域制限されている」ということであり，帯域制限の式でかけば，

$$\frac{W}{2} = 1 < |\omega| \implies F_{\cos(t)}(\omega) = 0$$

であるから $W = 2$ となり，さらにサンプリング間隔の上限であるナイキスト間隔は $\tau_N = \pi$ ともとまる。よく知っている $\cos(t)$ からこのナイキスト間隔でサンプリング値を求めてみると，

j	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
τj	...	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	...
$\cos(\tau j)$...	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...

という表が作成できる。これらはもちろん帯域制限の条件が満たされている。一方サンプリング定理では， $W = 2, \tau = \tau_N = \pi$ として

$$x(t) = \frac{\tau W}{2\pi} \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(\tau j) \cdot \text{sinc}\left(\frac{W}{2}(t - \tau j)\right) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} x(\pi j) \cdot \text{sinc}(t - \pi j)$$

となる。サンプリング値に $x(\pi j) = \cos(\pi j)$ を適用してこの $x(t)$ のグラフを書いてみよう。とは言え，無限和であるから全部は不可能。 $j = -3, \dots, 3, j = -6, \dots, 6, j = -9, \dots, 9$ の 3 個の場合と本来の関数 $\cos(t)$ をグラフ（図 11.3）に書いた。だんだん近寄ってくる様が見て取れる。

同様な議論は $\sin(t)$ に対しても行うことができる¹⁴。ただしそのまま単純に行うとサンプリングの表が

j	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
τj	...	-3π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	3π	...
$\sin(\tau j)$...	0	0	0	0	0	0	0	...

となり，サンプリング値が全て 0 である。これではなにも計算ができない。ということでサンプリングする場所を $\pi/2$ ずらす。つまり， $k := j + 1/2$ として

k	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
τk	...	$-5\pi/2$	$-3\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$...
$\sin(\tau k)$...	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...

とする。このグラフ（図 11.4）は，あたりまえだが， \cos がずれたものになっている。

¹³10.3.4 で求めた。

¹⁴ $\sin(t)$ のフーリエ変換は $F_{\sin(t)}(\omega) = \frac{1}{i}\pi\delta(\omega - 1) - \frac{1}{i}\pi\delta(\omega + 1)$ 。

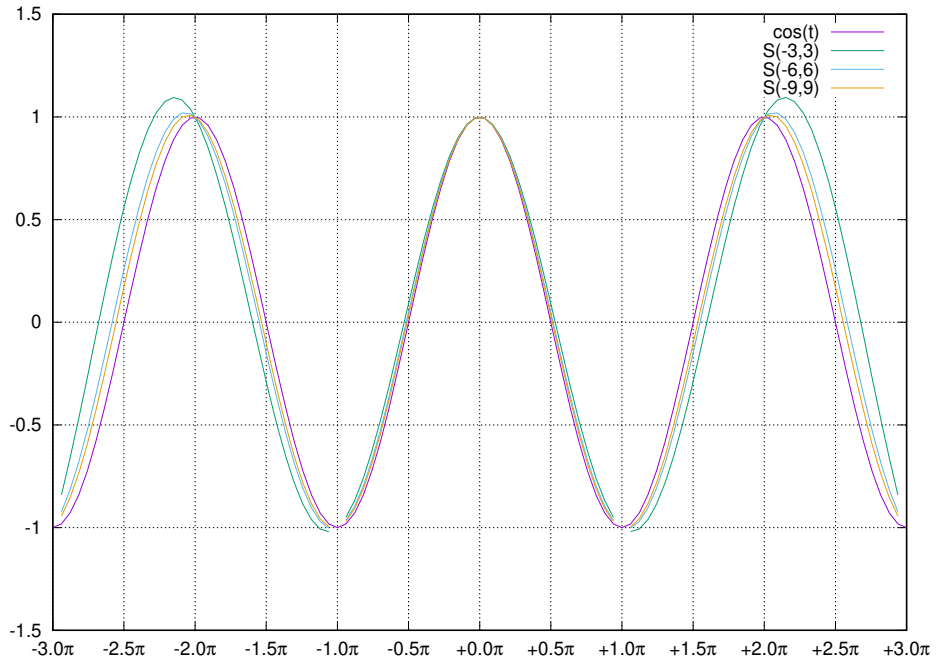


図 11.3: $\cos(t)$ のサンプリングのグラフ

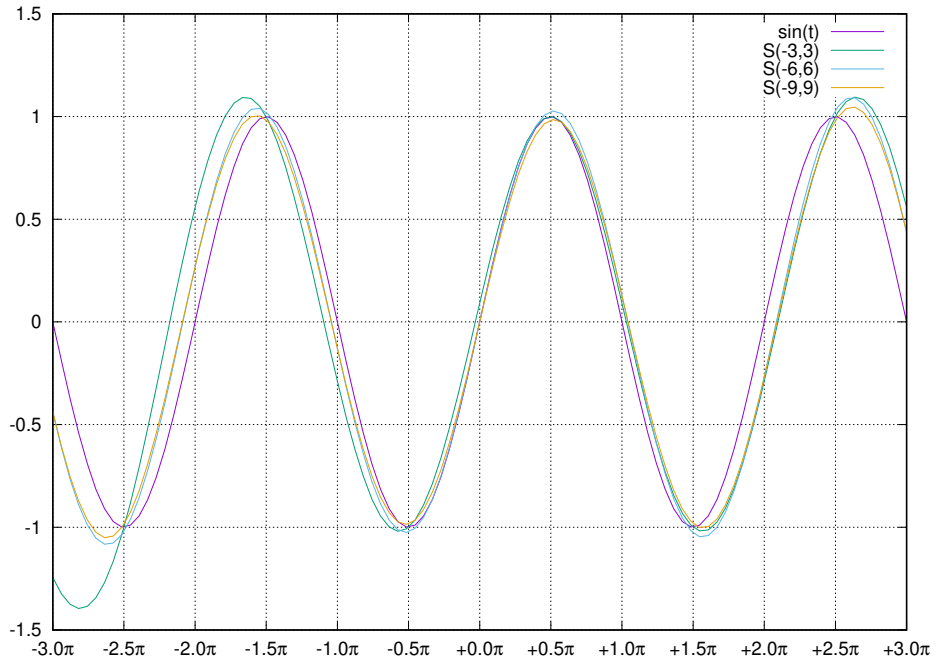


図 11.4: $\sin(t)$ のサンプリングのグラフ

もうひとつやってみよう． $x(t) := 1 + 3\cos(t) + \cos(2t)$ を考える．この関数のフーリエ変換で有効な角周波数は， $\omega = \pm 1, \pm 2$ であるので，この角周波数は 2 に帯域制限されていることになる．よって $W = 4$ であり， $\tau_N = \pi/2$

となる。サンプリングの表は

j	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
τj	...	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	...
$x(\tau j)$...	5	0	-1	0	5	0	-1	0	5	...

であり、グラフは図 11.5 となる。もとの関数に近づいてきているのが見える。

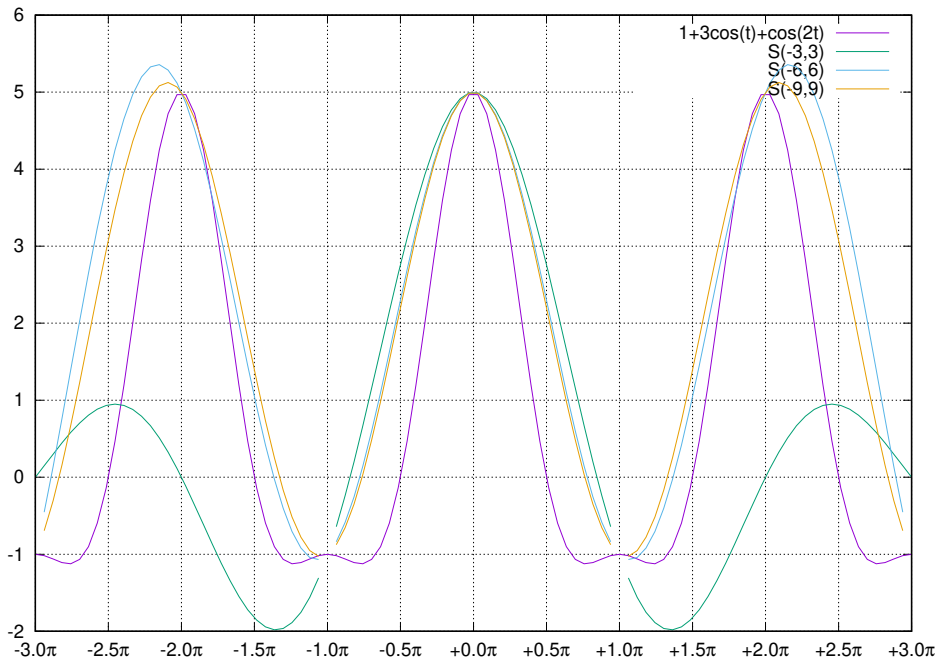


図 11.5: $1 + 3\cos(t) + \cos(2t)$ のサンプリングのグラフ

11.6.2 レコードの例

たとえばここに全演奏時間が 40 分のレコードがあるとしよう。これのサンプリングデータをとって、そこからもとのレコードに戻すには、どうすれば可能になるのだろうか？

もとのレコードの関数を $x(t)$ とし、そのフーリエ変換を $X(\omega)$ と置こう。そして我々は角周波数で H_ω まで聞こえるものとする。ということは、 H_ω より大きい角周波数の領域では $X(\omega) = 0$ としてよい。つまり帯域制限の条件は

$$\frac{W}{2} = H_\omega < |\omega| \iff -H_\omega \leq \omega \leq H_\omega$$

であり、帯域制限幅は $2H_\omega$ となる。従ってサンプリングのナイキスト間隔は、

$$W = 2H_\omega = \frac{2\pi}{\tau_N} \iff \tau_N = \frac{2\pi}{2H_\omega}$$

と求まる。実際に我々が聞き分けられる領域は 22050Hz らしい。こういう数値は角周波数にはなっていないのが通常であるので、角周波数にすれば $2\pi \times 22050\text{Hz}$ でこれが上で使った H_ω である。それゆえ、

$$\tau_N = \frac{2\pi}{2H_\omega} = \frac{2\pi}{2\pi \times 2 \times 22050} = \frac{1}{44100} \sim 2.267 \times 10^{-5} [\text{sec}]$$

であり、サンプリング周波数は

$$(\text{サンプリング周波数}) = \frac{1}{\tau_N} = 44100[\text{Hz}]$$

$$(\text{サンプリング角周波数}) = \frac{2\pi}{\tau_N} = 2\pi \times 44100 \sim 277088[\text{Hz}]$$

となる。サンプリング点の個数は、レコードを 40 分としたので、

$$\frac{40[\text{min}]}{\tau_N} = 2400 * 44100 = 105840000 \sim 1.06 \times 10^8$$

となる。

11.7 最後に

サンプリング定理成立のための条件を満たしていれば、サンプリングしたデータからそのもとの関数 $x(t)$ が求まることがわかった。

また、サンプリングデータを離散フーリエ変換し、その $X(\omega)$ の振る舞いをみて離散フーリエ変換の値 \vec{F} に適当な操作を施し、あらたな \vec{F}' を作成するというも行われるようである。そして \vec{F}' に離散フーリエ逆変換を行い、あらたな（加工された）サンプリングデータを導出し、それにサンプリング定理を適用して「フィルター」のかかった関数 $x(t)'$ を作り出すということも行われるらしい。

そしてさらに、サンプリング定理は、結局のところ無限和になっているので、どこまで和を取るのかも問題であろう、離散フーリエ変換にかんしても、不連続な部分やら離散的な部分やらをどう補完するのかもいろいろと数学の技術の必要なことであるだろう。

これ以上の詳細については、おそらく信号処理系のより深い議論になると思われ、本書の範囲を大きく超えている。より専門的な教科書にあたってください。

付録A Proof of Some Theorems

A.1 $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 2\pi\delta(k, 0)$

Theorem A.1.1. 整数 k に対して, 次のことが成立する.

$$I_{2\pi} := \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 2\pi\delta(k, 0) = \begin{cases} 2\pi & \text{where } k = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

Proof. $k = 0$ の場合は,

$$I_{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = [t]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

となる. 一方 $k \neq 0$ の場合は次のとおり.

$$I_{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \left[\frac{1}{ik} e^{ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{ik} (e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}) = 0.^1$$

□

Corollary A.1.1. m, n を整数とする時, 次のことが成り立つ.

$$J_{2\pi} := \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = 2\pi\delta(m, n) = \begin{cases} 2\pi & \text{where } m = n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

Proof. $k = (m - n)$ とおくと, 上の事実を利用して次の様になる.

$$J_{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = 2\pi\delta(k, 0) = 2\pi\delta(m - n, 0) = 2\pi\delta(m, n).$$

□

Corollary A.1.2. m, n は整数, L を任意の正の定数とし, Ω は $\Omega \cdot 2L = 2\pi$ を満たすものとする. この時

$$I_{2L} := \int_{-L}^L e^{i(m-n)\Omega t} dt = 2L\delta(m, n) = \begin{cases} 2L & \text{where } m = n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

が成立する.

Proof. $u = \Omega t$ とすれば,

$$du = \Omega dt, \quad \frac{t}{u} \left| \begin{array}{ccc} -L & & \rightarrow L \\ -\Omega L (= -\pi) & & \rightarrow \Omega L (= \pi) \end{array} \right.$$

したがって

$$I_{2L} = \int_{-L}^L e^{i(m-n)\Omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)u} \frac{du}{\Omega} = 2\pi\delta(m, n) \frac{1}{\Omega} = 2L\delta(m, n).$$

となる.

□

¹ $e^{ik\pi} - e^{-ik\pi} = (e^{i\pi})^k - (e^{-i\pi})^k = (-1)^k - (-1)^k = 0$. Or, $e^{ik\pi} - e^{-ik\pi} = (\cos k\pi + i \sin k\pi) - (\cos k\pi - i \sin k\pi) = 2i \sin k\pi = 0$.

A.2 $\sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)l\right) = N\delta(j,k)$

Theorem A.2.1. j, k, l が整数, N 自然数の時, 次が成立する.

$$\sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)l\right) = N\delta(j,k) \quad (\text{A.2.1})$$

Proof. $j = k$ の場合は次のとおり.

$$\sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)l\right) = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N.$$

$j \neq k$ の場合, η を

$$\eta = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)\right)$$

と定義する. すると,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)l\right) &= \sum_{l=0}^{N-1} \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)\right)\right)^l \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \eta^l \\ &= 1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{N-1} \end{aligned}$$

となる. ここで, η^N を考えよう.

$$\eta^N = \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)\right)\right)^N = \exp(i2\pi(j-k)) = (\exp(i2\pi))^{(j-k)} = 1^{(j-k)} = 1$$

となるので,

$$1 - \eta^N = 0.$$

また S を次の量をあらわすものとする²:

$$S = 1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{N-1}.$$

すると

$$\eta S = \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^N$$

となるので,

$$(1 - \eta)S = 1 - \eta^N = 0$$

を得る. $1 - \eta$ は定義から 0 ではない. したがって,

$$S = 0$$

すなわち,

$$S = 1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{N-1} = 0$$

$j = k$ の場合を合わせて, 以上から次が結論できる.

$$\sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}(j-k)l\right) = N\delta(j,k).$$

□

²等比級数のアイデアを使う.

A.3 $\int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixK}/x) dx$

Theorem A.3.1. K が定数の時, 次が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixK}}{x} dx = \begin{cases} i\pi & K > 0, \\ -i\pi & K < 0. \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

Proof. この積分を三角関数をもちいて表記すると, 次の様になる:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixK}}{x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos(Kx) + i \sin(Kx)}{x} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(Kx)}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx. \end{aligned}$$

まず最初に, $K \neq 0$ であるとしよう. すると,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(Kx)}{x} dx &: \text{odd function,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx &: \text{even function,} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(Kx)}{x} dx &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx \end{aligned}$$

を得る. $\int_0^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx$ は著名な積分で, その値は

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & K > 0, \\ -\pi/2 & K < 0. \end{cases}$$

である³. 結果, 次式を得る:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixK}}{x} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx = \begin{cases} i\pi & K > 0, \\ -i\pi & K < 0. \end{cases}$$

もし $K = 0$ だとすると, もとの積分は

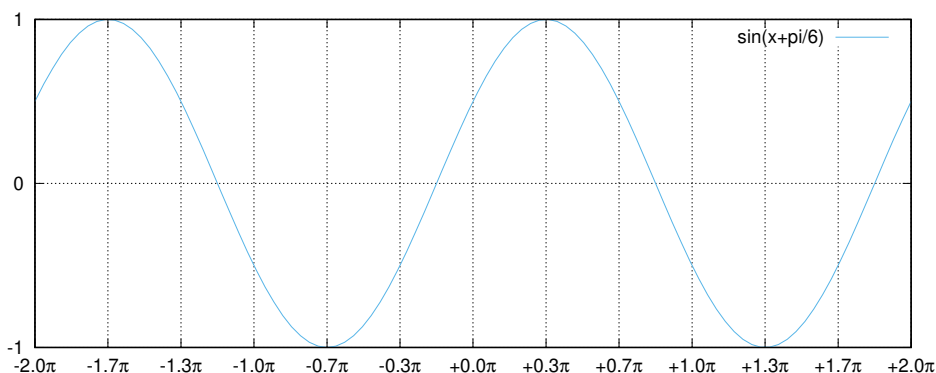
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(Kx)}{x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Kx)}{x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{0}{x} dx = 0, \end{aligned}$$

である. 発散するので積分は得られない. □

³詳解物理応用数学演習 [4, p.82] 参照. ちなみに積分範囲である 0 は分母を 0 にしてしまうが, そこは $\int_0 \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon} \dots$ などと考える.

A.4 $\int_{-L}^L = \int_0^{2L}$ (周期 $2L$)

まず、次の図を見てもらおう。これは、周期 2π の関数である。そして図をみて、積分がかこまれる部分の



面積であることを思い出せば、

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{2\pi}$$

であることが容易に見て取れる。「大人」になっているならばもはやそれでよい。また容易にこれに見当がつくように修練すべきではある。しかしながら、「本当にそうか、絶対そうか」と言われた時のために、数理的に証明しておくのもひとつの姿勢であるかもしれない。

例によって周期 $2L$ の関数 $f(t)$ を考えよう。単純に $x = t + L$ と変数変換しただけではあまりうまく行かない。 $f(t) = f(x - L)$ となって扱いに困る。というわけで、解法のテクニックめくが、積分2つに分け、そのうちの片方に関してのみ変数変換する、という方法で導出する。

Proof. まず積分を2つにわける。

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \int_{-L}^0 f(t) dt + \int_0^L f(t) dt$$

ここで、 $\int_{-L}^0 f(t) dt$ に対してのみ変数変換 $x = t + 2L$ を施す。微分、変域は

$$dx = dt, \quad \begin{array}{l|l} t & -L \rightarrow 0 \\ x & L \rightarrow 2L \end{array}$$

となるので、

$$\int_{-L}^0 f(t) dt = \int_L^{2L} f(x - 2L) dx.$$

さて、そもそも関数 f は周期 $2L$ なので当然のごとく $f(x - 2L) = f(x)$ である。したがって、

$$\int_{-L}^0 f(t) dt = \int_L^{2L} f(x - 2L) dx = \int_L^{2L} f(x) dx$$

であり、もとの積分に戻れば、

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \int_L^{2L} f(x) dx + \int_0^L f(t) dt,$$

そして積分変数を統一し、かつ、2つの積分を合併させて

$$\int_{-L}^L f(t) dt = \int_0^{2L} f(t) dt$$

を得る.

□

付録B $\delta(x)$ 関数あれこれ

B.1 特徴的な性質

δ 関数についての必要最低限のことからは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

であり、もうすこし一般化した場合として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

があげられる。さらに、 $f(x)=1$ とすれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

である。象徴的には次のようにも書く：

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{where } x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \text{where } x = a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

δ 関数の実際の働きは、 δ 関数が 0 でない所のみが活躍するので、積分の範囲は少なくともそこを含んでいれば良い。したがって、例えば $\varepsilon > 0$ として

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1$$

であり、 $-\varepsilon < a < \varepsilon$ であれば、

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

にもなる。

B.2 積分による表現

いままで天下り的に $\delta(x)$ の積分表現を導入し、基底ベクトルの正規直交性をそれを用いて示した。そしてこの積分形の δ 関数をフーリエ解析のもろもろに利用して来た。ここではその積分表現を導出してみよう。

まず、前提として、何らかの形でフーリエ変換が導入された世界にいるものとしよう。そこにはもちろん次のフーリエ変換が定義されているはずだ：

$$F_{f(x)}(\omega) = \langle e^{i\omega x} | f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

これを使って $\delta(x)$ をフーリエ変換をし、 $\delta(x)$ の性質を適用すると

$$F_{\delta(x)}(\omega) = \langle e^{i\omega x} | \delta(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta(x) dx = 1$$

となる。 δ 関数のフーリエ変換は 1 という定数なのである。 δ 関数の重要な性質である。

つぎに進もう。そのままでは定数なので打つ手がなく、先に進めない。そこで少し工夫をする。 $\delta(x-x_0)$ を考えるのである。すると、

$$F_{\delta(x-x_0)}(\omega) = \langle e^{i\omega x} | \delta(x-x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta(x-x_0) dx = e^{-i\omega x_0}$$

となる。そしてこれを逆変換する：

$$|\delta(x-x_0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\omega x}\rangle d\omega \langle e^{i\omega x} | \delta(x-x_0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\omega x}\rangle e^{-i\omega x_0} d\omega.$$

表現 $|x\rangle$ でベクトルから関数に移れば、

$$\delta(x-x_0) = \langle x | \delta(x-x_0) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | e^{i\omega x} \rangle e^{-i\omega x_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-i\omega x_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-x_0)} d\omega$$

となる。ここで、 $x_0=0$ としてもよいし、また、 $t=x-x_0$ としてもよい。とにかく結果として、

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

という積分表現が得られるのである。

δ 関数が偶関数であることも見ておこう。いま得られた積分表現から

$$\delta(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega$$

である。ここで積分変数 ω を $\omega=-\xi$ と変更すると、

$$d\omega = -d\xi, \quad \begin{array}{c|c} \omega & -\infty \rightarrow \infty \\ \xi & \infty \rightarrow -\infty \end{array}$$

となるので、

$$\delta(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\xi t} (-d\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\xi = \delta(t)$$

となる。つまり δ 関数は偶関数。したがって、

$$\delta(t) = \delta(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega$$

とまとめられる。こころへんは縦横無尽に利用したい。

‡ 留意事項

本論では、先に δ 関数の積分表現を天下りに導入し、それを利用することによってフーリエ解析を組み立てて来た。ここではそのフーリエ解析のひとつの結果であるフーリエ変換をつかって δ 関数を定義した。これはある意味、循環論法になってしまっている。ここで述べたかったことは、仮に他の定式化でフーリエ変換が定義されたとした場合を想定し（フーリエ変換のある世界をあらかじめ想定）、その世界ではかようにして導出ができる、という事実である。

δ 関数のその他の性質の詳細、超関数の定式化については後藤らの本 [4]などを参照されたい。

B.3 離散変数関数と δ 関数の運用

離散変数関数を，解析的なあつかいが容易になるように δ 関数を持ちいて連続変数関数化して表現することがここでの目的である．離散変数の集合を

$$D := \{x_n \mid \forall n \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

としておこう．離散変数関数とは，この定義域に対しては値をもち，それ以外のものには値は 0 であると約束することにする．すなわち，

$$(\text{離散変数関数}) = \begin{cases} f(x_j) & \text{for all } j \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

さてここで，天下りの的に $p(x)$ という連続変数関数があるとして，かつ， $p(x_j) = f(x_j)$ が成り立つものであるとしよう．そして基本とするものは，

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\delta(x-a)dx = p(a)$$

という δ 関数の働きである．これをもとに例えば

$$f_d(x) := \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\delta(x-x_m)dx + \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\delta(x-x_{m+1})dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\{\delta(x-x_m) + \delta(x-x_{m+1})\}dx$$

という関数を考えてみよう．ここで δ 関数の象徴的表現

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \text{where } x = a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を利用する．つまり「 $x \neq a \implies \delta(x-a) = 0$ 」なる事実を利用するのである．すると

$$f_d(x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_m)\{\delta(x_m-x_m) + \delta(x_m-x_{m+1})\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_m)\delta(x_m-x_m)dx = f(x_m)$$

$$f_d(x_{m+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{m+1})\{\delta(x_{m+1}-x_m) + \delta(x_{m+1}-x_{m+1})\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{m+1})\delta(x_{m+1}-x_{m+1})dx = f(x_{m+1})$$

であることがわかり．それ以外の x については， $f_d(x) = 0$ であることもわかる．これを D 全体にまで拡張すれば $f_d(x)$ が

$$f_d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \sum_{x_n \in D} \delta(x-x_n)dx$$

となることは自然であろう¹．この場合でもやはり

$$f_d(x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_m) \sum_{x_n \in D} \delta(x_m-x_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_m)\delta(x_m-x_m)dx = f(x_m)$$

$$f_d(x_{m+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{m+1}) \sum_{x_n \in D} \delta(x_{m+1}-x_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{m+1})\delta(x_{m+1}-x_{m+1})dx = f(x_{m+1})$$

¹ $f_d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \sum_{x_n \in D} \delta(x-x_n)dx$ を先に積分してしまっはうまくない．つい

$$f_d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \sum_{x_n \in D} \delta(x-x_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\{\dots + \delta(x-x_{-1}) + \delta(x-x_0) + \delta(x-x_1) + \dots\}dx = \dots + f(x_{-1}) + f(x_0) + f(x_1) + \dots$$

と計算してしまいがちであるが，これは先に積分を実行してしまうことによって x での関数という見立てを取り除いてしまうからである．一連の議論は， x が何であるかによる振る舞いを見ることが主眼であるので，積分を実行しないでおくのである．

となっていて、 $x \notin D$ の時には $f_d(x) = 0$ となる。つまり、 $f_d(x)$ は $p(x)$ を離散変数化したものとなっている²。
 ここで簡便的な表記を導入しよう。「 $\delta(x)$ 関数をかけて積分する」という操作を $\rho(x)$ であらわす。すなわち、

$$p(x)\rho(x-a) := \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\delta(x-a)dx = p(a).$$

これにより $f_d(x)$ は

$$f_d(x) = p(x) \sum_{x_n \in D} \rho(x - x_n)$$

とあらわせる。そして当然ながら

$$f_d(x_n) = p(x_n) = f(x_n) = p(x)\rho(x - x_n)$$

である。これは連続関数 $p(x)$ から $x = x_n$ の部分を取り出しているということに他ならず、クロネッカーのデルタの連続変数への拡張と見なしてよい。さらに、この ρ の働き（クロネッカーのデルタ的働き）を考えれば、

$$f(x_n) = p(x)\rho(x - x_n) \tag{B.3.1}$$

$$f_d(x) = p(x) \sum_{x_n \in D} \rho(x - x_n) = \sum_{x_n \in D} p(x)\rho(x - x_n) = \sum_{x_n \in D} f(x_n)\rho(x - x_n) \tag{B.3.2}$$

ということも成り立つ。(B.3.2)の最後の結果は、あらかじめ存在するとした連続変数関数 $p(x)$ を想定せずとも $f(x_n)$ のみ知っていれば離散変数関数化できるということを意味している。もちろんさきに述べたように、 $p(x)$ から x_n の部分を取り出しているという解釈も問題ない。それを利用して、離散変数関数 $f_d(x)$ からそのもとになっている連続変数関数 $p(x)$ を類推するということにも応用できよう。目的に応じて臨機応変に使えばよい。

そして若干の混乱を招くのだが、ことさらにこの $\rho(x)$ を用いずに、 δ 関数そのまま代用してしまう場合もある。

$$f(x_n) = p(x)\delta(x - x_n)$$

$$f_d(x) = p(x) \sum_{x_n \in D} \delta(x - x_n) = \sum_{x_n \in D} p(x)\delta(x - x_n) = \sum_{x_n \in D} f(x_n)\delta(x - x_n)$$

と言った具合にである。フーリエ解析ではこちらのほうが圧倒的に都合がよい。変換が積分をともなって定義されているので、素直に δ 関数の働きを適用できて見通しがよいのである。そうやって運用されている場合が多い。

² 楕形関数は、 $f(x) = 1$ の場合で、かつ、離散変数が等間隔で並んだものである。

付録C フーリエ級数からの導出

議論の出発点をフーリエ級数とし，そこからフーリエ変換，離散フーリエ変換を導出してみる（一般にはこの方法で進めるのがスタンダードの様でもある）．導出の方法の素は周期の無限大化にある．結果，和（リーマン和）が積分になり，求める変換の形式が得られる．

C.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

周期 $2L$ ($\Omega 2L = 2\pi$) の関数 $f_{2L}(t)$ のフーリエ級数展開は， n を整数として，

$$F_n := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\Omega t} f_{2L}(t) dt$$
$$f_{2L}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\Omega t}$$

とあらわされる．少なからず技巧的ではあるが，この $f_{2L}(t)$ から $2\pi\Omega$ をくくりだす．

$$f_{2L}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\Omega}{2\pi\Omega} F_n e^{in\Omega t}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\Omega}{2\pi\Omega} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\Omega t} f_{2L}(t) dt \right\} e^{in\Omega t}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L e^{-in\Omega t} f_{2L}(t) dt \right\} e^{in\Omega t} \Omega$$

ここから， $L \rightarrow \infty$ にすることを考えて行く．ここで

$$\omega_n := n\Omega = n\pi/L$$
$$\Delta\omega := \omega_{n+1} - \omega_n = \Omega = \pi/L$$

とおくことにする．すると，

$$f_{2L}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L e^{-i\omega_n t} f_{2L}(t) dt \right\} e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

となり， $L \rightarrow \infty$ の極限を $f(t)$ とすれば，

$$f(t) := \lim_{L \rightarrow \infty} f_{2L}(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L e^{-i\omega_n t} f(t) dt \right\} e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

そして， $\Delta\omega$ の定義より $L \rightarrow \infty \iff \Delta\omega \rightarrow 0$ であるので，結果

$$f(t) = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-L}^L e^{-i\omega_n t} f(t) dt \right\} e^{i\omega_n t} \Delta\omega$$

を得る。これは、いわゆる、リーマン¹和である。リーマン和になれば積分も近い。さて、 $L \rightarrow \infty$ の場合の $\omega_n, \Delta\omega$ の振る舞いをみてみると、

$$\begin{aligned}\omega_n &= n\Omega = n\pi/L \rightarrow \omega \\ \Delta\omega &= \omega_{n+1} - \omega_n = \Omega = \pi/L \rightarrow d\omega\end{aligned}$$

のように、 ω_n は実数に収斂していき²、差分 $\Delta\omega$ は微分 $d\omega$ になる、と考えられる。つまり、リーマン和は「連続化」されて（和の極限を積分に変える、差分を微分にする、離散点列を連続化（実数化）するなどの定番処理）最終的に次の形を得る。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \right\} e^{i\omega t} d\omega$$

周期 $2L$ の関数において、 $L \rightarrow \infty$ とするということは、非周期関数にするということに等しい。というわけで、この $f(t)$ の表現をフーリエ逆変換またはフーリエ積分表現と呼び、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt =: F_{f(t)}(\omega)$$

をフーリエ変換と呼ぶならわしである。

C.2 フーリエ級数から離散フーリエ変換へ

周期関数のフーリエ級数を出発点とし、積分をリーマン和化（離散化）することで離散フーリエ変換を導出することを試みる。

そもそのフーリエ係数が積分であるので、離散化のためにこれをリーマン和で表してみよう。フーリエ係数は、

$$F_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-in\Omega t} f_{2L}(t) dt$$

であった。この F_n の被積分関数は周期 $2L$ であるので、積分範囲を $0 \rightarrow 2L$ に変えてもかわらない³。したがって、

$$F_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} e^{-in\Omega t} f_{2L}(t) dt. \tag{C.2.1}$$

ここで、区間 $[0, 2L]$ を N 等分する。そして、その等分点に t_j を割り当て、それらの差分を Δt とあらわす。つまり

$$\begin{aligned}t_j &= \frac{2L}{N} \cdot j \quad (j=0, 1, 2, \dots, N) \\ \Delta t &= t_{j+1} - t_j = \frac{2L}{N}\end{aligned}$$

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann.

²高校時代くらいまでならばこれを 0 にしてしまうだろう。それを実数の点に収斂すると考える所が成長というものなのかも知れぬ。

³証明するまでもなからうが、を付録 A.4 (p.85) にその理路を記した。

である。この表記のもとで F_n をリーマン和にしてみよう。差分を 0 にする極限が積分であったから、

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} e^{-in\Omega t} f_{2L}(t) dt \\
 &= \frac{1}{2L} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in\Omega t_j} f_{2L}(t_j) \cdot \Delta t \\
 &= \frac{1}{2L} \lim_{(2L/N) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in\Omega t_j} f_{2L}(t_j) \cdot (t_j - t_{j-1}) \\
 &= \frac{1}{2L} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in\Omega(2L/N)j} f_{2L}\left(\frac{2L}{N} \cdot j\right) \cdot \frac{2L}{N} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in(2\pi/N)j} f_{2L}\left(\frac{2L}{N} \cdot j\right) \cdot \frac{2L}{N} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in(2\pi/N)j} f_{2L}\left(\frac{2L}{N} \cdot j\right)
 \end{aligned}$$

ともとまる。そして、この級数の部分を「離散フーリエ変換 D_n 」と名付ける：

$$D_n := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in(2\pi/N)j} f_{2L}\left(\frac{2L}{N} \cdot j\right) \quad (\text{C.2.2})$$

ここで、 Σ の範囲については、ちょっとした工夫をした。区間 $[0, 2L]$ を N 等分し、その端点に t_j を割り当てたのだから、

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1 \cdot \frac{2L}{N}, \quad t_2 = 2 \cdot \frac{2L}{N}, \quad \dots, \quad t_{N-1} = (N-1) \frac{2L}{N}, \quad t_N = 2L$$

となっている。一方、和においては、 N 個の短冊長方形の面積を合算することになる。ここで、短冊長方形の高さとして、 t 軸上で左側のものを採用、つまり、

t_j と t_{j+1} の範囲の短冊長方形の場合、「高さ」として $f(t_j)$ をつかう

という方式を採用したのである。もちろん右側の値 t_{j+1} をつかってもよいだろう。極限をとれば一致はする。ただ、 $t_0 = 0$ が使えらると、指数関数の肩も 0 になるので、ひとつ計算が楽になる。よって、このような形で和をとることにした。図 C.1 は、周期 4 で、 $N = 20$ としたものの例である。この図でイメージをつかんでもらいたい⁴。

これをフーリエ級数表現にあてはめよう。ただし、有限次元化した（すなわち、 $\lim_{N \rightarrow 0}$ を外したということ）ことと、 t を t_0 から t_N までのみに離散化したことで、 Σ の範囲も $0 \rightarrow (N-1)$ とする。すなわち次の様に類推される。

$$f_{2L}(t) = \sum_n e^{in\Omega t} F_n \quad \Longrightarrow \quad f_{2L}(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Omega t_j} D_n.$$

⁴両端の短冊長方形の幅が他のものの半分になっているのは、gnuplot のせいである。ここをうまくアジャストする方法を筆者はまだ知らない。

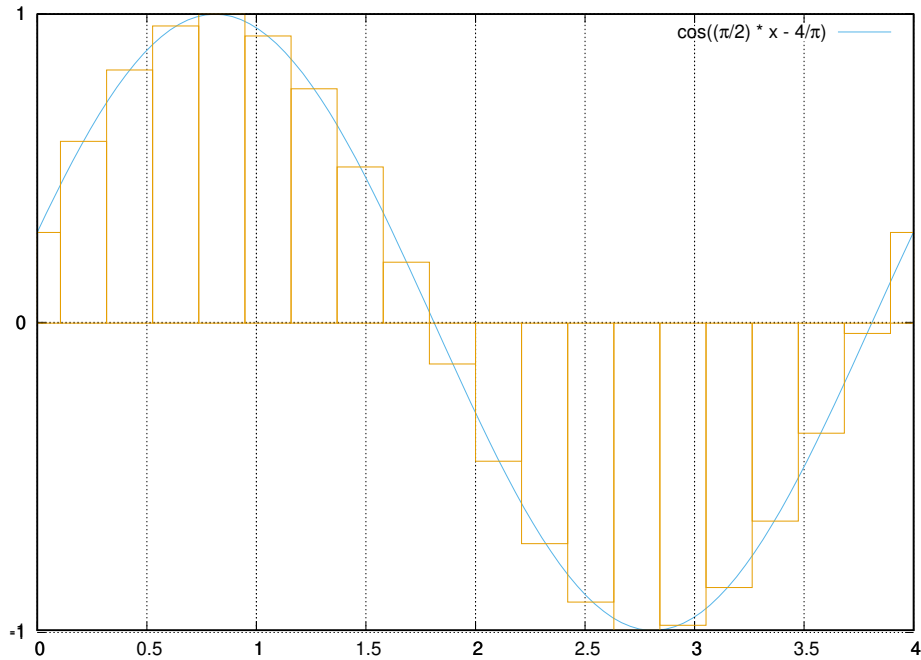


図 C.1: 短冊長方形をはめ込んだグラフ

計算しよう.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Omega t_j} D_n &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Omega t_j} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in(2\pi/N)j} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot j \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Omega t_j} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-in(2\pi/N)k} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \quad (\text{2つ目の } \Sigma \text{ は指標を変えた}) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{in(2\pi/N)j} e^{-in(2\pi/N)k} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(2\pi/N)j} e^{-in(2\pi/N)k} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \quad (\Sigma \text{ の順序入替}) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(2\pi/N)(j-k)} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(2\pi/N)(j-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(2\pi/N)(j-k)n} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot k \right) \delta_{j,k} \quad (\text{付録 A.2 (p.83 参照)}) \\
&= f_{2L} \left(\frac{2L}{N} \cdot j \right) \\
&= f_{2L}(t_j)
\end{aligned}$$

めでたくもとにもどった。これが離散的なフーリエ級数展開であり、「離散フーリエ逆変換」である。

まとめよう。 $|f_{2L}(t)|$ において、 t を離散化する、つまり、

$$\Omega \cdot 2L = 2\pi$$

$$t_j = \frac{2L}{N} \cdot j \quad (j=0,1,2,\dots,N)$$

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j = \frac{2L}{N}$$

としたとき、その関数の離散的なフーリエ級数展開（「離散フーリエ逆変換」）は

$$f_{2L}(t_j) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Omega t_j} D_n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nj} D_n$$

であり、このとき離散化されたフーリエ係数（「離散フーリエ変換」）は上記の D_n で、

$$D_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-in\Omega t_j} f_{2L}(t_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}nj} f_{2L}\left(\frac{2L}{N}j\right)$$

と求まったのである。

付録D 波動用語入門

第11章『サンプリング定理』の冒頭で簡単に述べた波動用語についていま一度それをまとめてみる。

D.1 周期関数

D.1.1 周期

最初に「周期 T 」というものについて考えてみよう。「周期 2π 」でお馴染みの $\cos(u)$ のグラフは図 D.1 となる。 $\cos(u/2)$ にたいして、我々はよく無頓着に「周期 4π 」と判断する。 $\cos(u/3)$ にたいしても同様に「周期

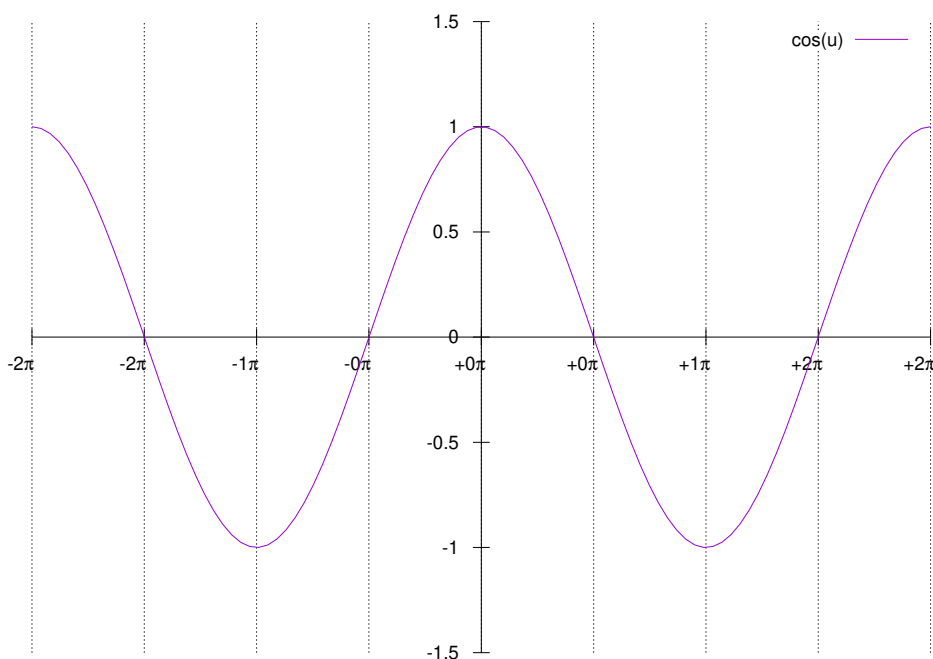


図 D.1: $\cos(u)$ のグラフ

6π 」と判断する。これらの関数を同時にグラフに表示してみよう(図 D.2)。グラフから分かるように、 $\cos(u)$ は、 $4\pi, 6\pi$ も「周期」である。カーブの形状の一番小さい単位を「波」とすれば、「周期」内の波の個数は2個、3個と異なっている(増えている)が、 4π で区切っても、その 4π 分のカーブは繰り返されている。

つまり、 $\cos(u)$ の「周期」の最小のものは 2π であり、その自然数倍 $2\pi \cdot n$ も「周期」となる。これは一般化できて、

最小周期が T であるならば、 nT ($n \in \mathbf{N}$) も周期である

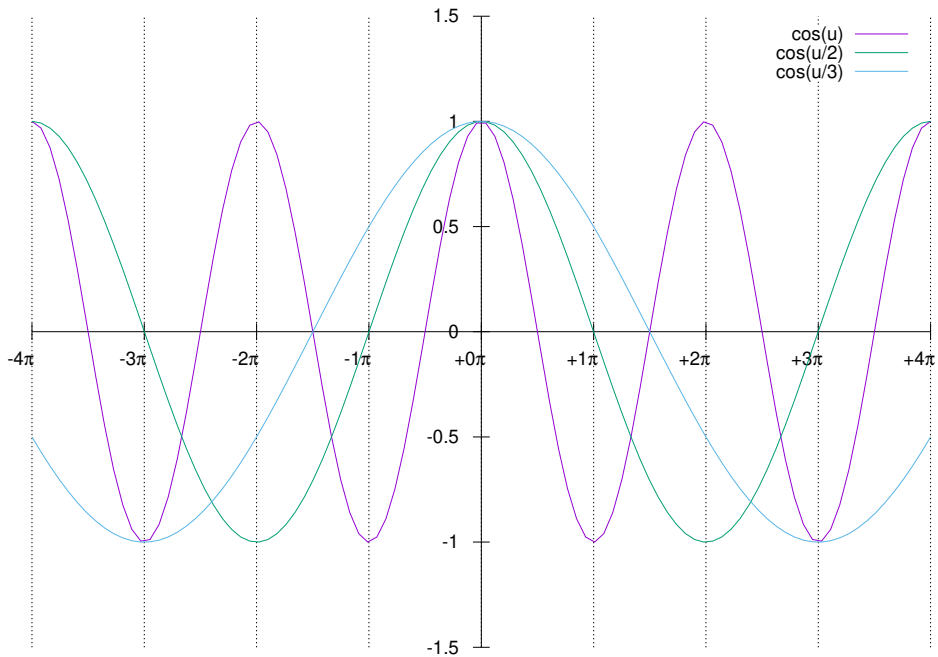


図 D.2: $\cos(u), \cos(u/2), \cos(u/3)$ を同時に表示したグラフ

となる。無造作に周期と言った場合には、つねにこの最小周期をさす、ということを知事項としよう。

T を周期とする周期関数 $f(u)$ の必要にしてかつ十分な条件はこの（最小）周期で語られる次の性質である：

$$f(u) = f(u + T).$$

これから

$$f(u) = f(u + nT)$$

は素直に導出できる¹。

D.1.2 振動数

周期 T から振動数²を次のように定義しよう：

振動数とは、単位量あたりの周期の個数と定める。つまり単位量あたりに何周期存在するか、というものである。この単位量に 1 を使うものをそのまま「振動数」といい、 2π を使うものを角振動数と言う。

したがって、周期 T が決まれば振動数、角振動数は次の様に決まる：

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \iff \nu T = 1, \quad \Omega T = 2\pi.$$

¹ただし逆は言えない。いま $g(u)$ が周期関数であったとして、 $g(u) = g(u + nT)$ が成り立つとしよう。この結果から T が（最小）周期であるとは言えない。 nT が（最小）周期の場合があるからである。

²ここでは「波」をついつい想像してしまう「周波数」ではなく、「振動数」で論を進めていくことにしよう。

D.2 複素指数関数による分析

複素指数関数の場合の周期関数と振動数について考えてみよう。 u を変数とし、パラメタを θ として複素指数関数をつぎのようにあらわす：

$$\phi(u) = e^{i\theta u} = \exp(i\theta u) \quad (\theta, u \in \mathbf{R}).$$

$\phi(u)$ の周期を T としよう。ただしこれが最小周期である保証は今の所はない。周期関数であるということから、

$$\phi(u) = \phi(u+T) \iff \exp(i\theta u) = \exp\{i\theta(u+T)\} \iff \exp(i\theta u) = \exp(i\theta u)\exp(i\theta T)$$

となり、結果

$$\exp(i\theta T) = 1 \implies \theta T = 2\pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

を得る。 θ が無限個存在することがわかる。 n の時の θ を θ_n と書くことにすると、

$$\theta_n = \frac{2\pi}{T}n = \frac{2\pi}{T/n}$$

となり、これは周期が T/n の角振動数であることを示している。つまり、 $\exp(i\theta_n u)$ は周期 T でもあり、かつ、周期 T/n でもあるのだ。確認してみよう。 $\phi_n(u) := \exp(i\theta_n u)$ として、

$$\begin{aligned} \phi_n\left(u + \frac{T}{n}\right) &= \exp\left\{i\theta_n\left(u + \frac{T}{n}\right)\right\} \\ &= \exp(i\theta_n u)\exp\left(i\theta_n \frac{T}{n}\right) \\ &= \exp(i\theta_n u)\exp\left(i\frac{2\pi}{T}n\frac{T}{n}\right) \\ &= \exp(i\theta_n u)\exp(i2\pi) \\ &= \phi_n(u) \end{aligned}$$

と確かに周期 T/n であることが見えた。 T は $\phi(u)$ の最小周期ではない。つまり、周期 T の $\phi(u) = \exp(i\theta u)$ は無限個存在して、角振動数はそのおのおのについて $\theta_n = (2\pi/T)n$ となっているのである³。そして $n=1$ のもの、つまり 0 でない最小の角振動数を「基本角振動数」と呼ぶこともある。通常それを Ω と書く：

$$\Omega = \theta_1 = \frac{2\pi}{T} \iff \Omega T = 2\pi.$$

実はもうひとつ問題がある。角振動数は単位量あたりの周期の個数として定義されていた。個数であればそれは常識的には負の数にはならない。しかしながら、上記 θ_n は n が整数であることにより負の値にもなりうる。これはどう考えたらよいか？ θ_n の形式から明らかのように、 $\theta_{-n} = -\theta_n$ であるから、図 D.3 のように角度の進む向きを逆に定義し、時計回り方向を「負の振動数」と解釈することにして、混乱（と矛盾？）を避けるのである。

³これが実はフーリエ級数のところで $-id/dx$ の作用素についての固有値方程式から、離散固有値をもとにして導出した基底ベクトルの関数表示そのものなのである。実際、角振動数がそれぞれ θ_m, θ_n である $\phi_m(u), \phi_n(u)$ の 1 周期 T 分のエルミート内積をとれば、それが正規直交関係にあることが簡単な計算により見て取れる。数学のこういう所は実に興味深く面白い。

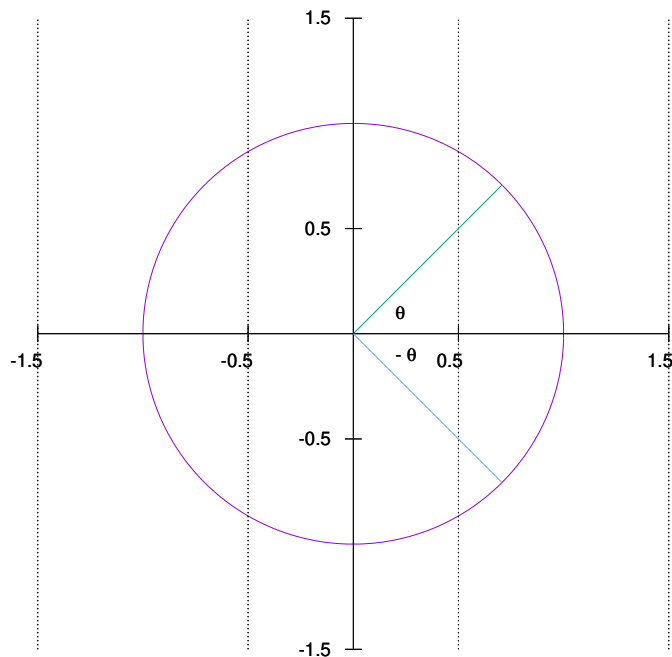


図 D.3: 負の振動数の解釈イメージ

D.3 波動理論

上記の周期，振動数の概念は，関数の形状の繰り返しというものの分析から導かれたもので，いわば，数学的な操作からのみ導出されたものである，一方，現実には，空間を伝わる「波」が存在する．そこにはある種の周期性がある．周期関数の概念を基本にしてこの波はあらわされる．そのために，数学オンリーから物理的な運動学にすこし土俵を移す．波の実体化である．

D.3.1 波長，波数

「波」が移動するイメージは持ちやすい．日常的にはそのような経験を多々重ねている．この移動するという運動形態から，時間と座標，ひいては速度という物理量を利用させてもらおう．波の速度（正確には位相速度⁴）を v としよう．最小周期 T を時間であらわし， T で進む距離を波長 (λ) と定義する．速度と距離の関係から，

$$\lambda = vT$$

となる．これは波1つ分である．

ここから「波数 (k)」という概念が生まれてくる（角波数という言い方もあるようだ）．通常はそれは単位距離あたりの波の個数で，単位を 2π にしたとき

$$k = 2\pi/\lambda \iff k\lambda = 2\pi$$

であらわされる．ただしこれは1次元の空間の場合．我々の実世界の空間を対象とする場合には，それは3次元空間であるので，波数も3次元のベクトルになる．それを波数ベクトル \vec{k} と言う．したがって，波数の定

⁴波には「群速度」という物理量もある．詳しくは物理の本にあたられたい．

義も,

$$|\vec{k}| = 2\pi/\lambda \iff |\vec{k}|\lambda = 2\pi$$

となる⁵.

D.3.2 周波数（振動数）と波数の関係

簡便性を高めるため、1次元の空間で考える。角周波数⁶と波数は、周期 T と位相速度 v を介して、

$$\lambda = vT$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi$$

という関係にある。これより、

$$\omega T = k\lambda,$$

$$\omega\lambda = 2\pi v \iff \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} \iff \omega = kv$$

などなどの関連性が見られる。とくに、最後の周波数の関係は、波動的に言えば、 2π 単位時間に波が何波長分進むかということを示している。

D.3.3 波動の表現形式

まず前提として、時間に関して周期 T であることを仮定した。さらにその結果、空間的には波長 λ が決まった。これは波動的には、座標 x で決まるある量は $x+\lambda$ でも同じ値であるということを示す。つまり λ は空間的な「周期」であるといえる。波数、角周波数を用いて、座標空間に対応する周期関数を e^{ikx} 、時間に対応する周期関数を $e^{i\omega t}$ として各々に周期性 (λ, T) を課そう。そして実体としての波はこれらが渾然一体となったものであるとして、ほとんど天下りの的であるが、それらの積であらわすことができるとする。つまり

$$(\text{波}) \sim e^{ikx} \cdot e^{i\omega t} \sim e^{i(kx+\omega t)}$$

という想定である。これを微調整した結果、波動は

$$\psi(x, t) = A \exp\{i(kx - \omega t + \alpha)\}$$

と表現される⁷。各々のパラメータは、

x	座標
t	時間
A	振幅
k	波数
ω	角周波数
α	初期位相

⁵ $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ とすると $|\vec{k}| = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

⁶ 波を実体として扱うので、振動数ではなく周波数ということばにしてみよう。

⁷ 3次元空間の場合には、 $\psi(\vec{r}, t) = A \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)\}$ 。これは、 \vec{k} に垂直な面が同位相面となり、それが伝搬していくので「平面波」と呼ばれる。一方、原点からの距離が r の球面が同位相面となって「球面」が伝わっていくものを球面波とよぶ。そのときは k はベクトルではなくなり、波動の式は、 $\psi(r, t) = A \exp\{i(kr - \omega t + \alpha)\}$ 。ここではほとんど天下りの的に実施してきたが、これら波動の表現については山本の本 [6] がとても参考になる。

と名付けられている。ゆめゆめ条件

$$\lambda = vT$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$k\lambda = 2\pi$$

を忘れてはならない。

$\psi(x, t)$ のイメージをグラフ化して、 T や λ のイメージをみよう。

まず最初に、 $\psi(x, t)$ において変数 x を固定化する。つまりある点での時間的な振る舞いの描写（振動の描写）である。グラフの横軸は時間 t 。座標点を固定し、時間の推移のみを観測している状況である。波動は、

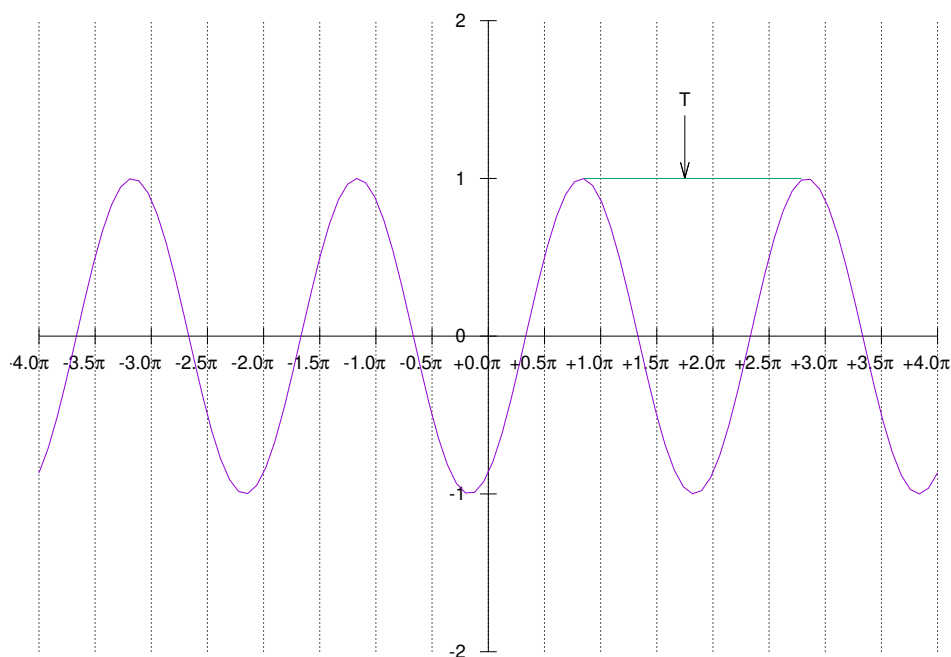


図 D.4: x を固定化した波動イメージ

その座標点では、時間に依存して振動しているものになる。

次に、 $\psi(x, t)$ において変数 t を固定化する。つまりある時刻での空間的な振る舞いの描写である（空間運動の描写）。波動を写真にとったようなものと思ってよい。グラフの横軸は座標 x 。

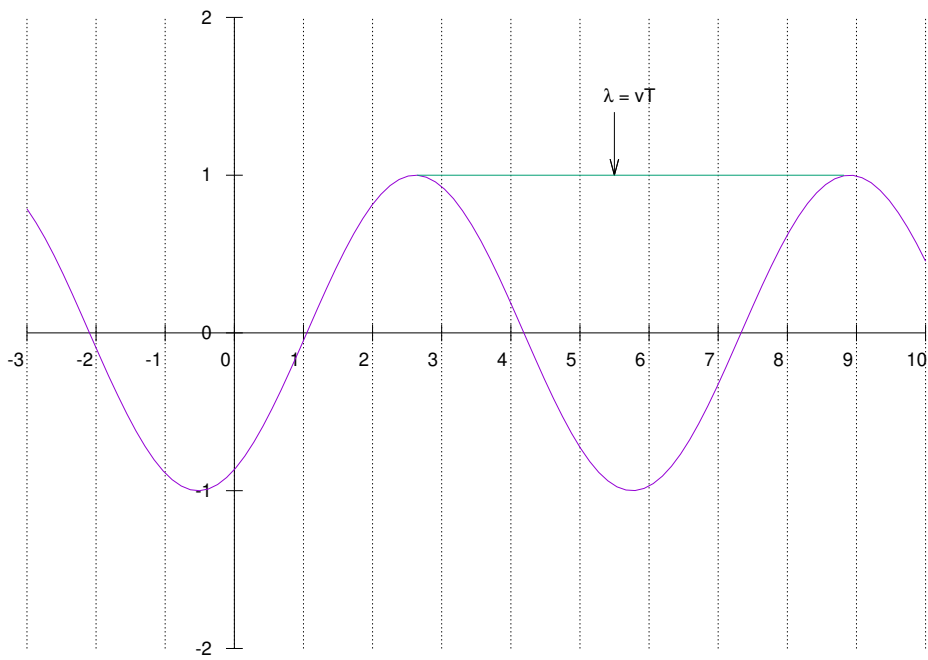


図 D.5: t を固定化した波動イメージ

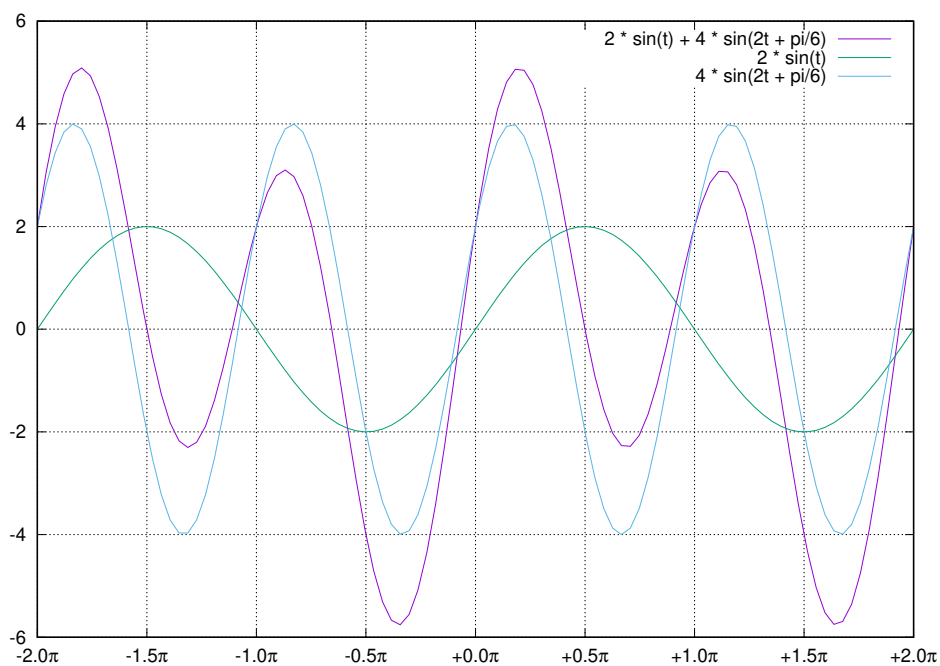
付録E Gnuplot programs

E.1 $2\sin(t) + 4\sin(2t + \pi/6)$ のプログラム (図 10.1)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: f-seF.gplt,v 1.3 2014/12/05 10:43:39 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./f-seF.ps"
set grid
set xrange[-2*pi:2*pi]
set xtics -2*pi,pi/2,2*pi
set format x "%+.1P{/Symbol p}"

f1(x) = 2 * sin(x)
f2(x) = 4 * sin(2*x + pi/6)
F(x) = f1(x) + f2(x)

plot F(x) title "2 * sin(t) + 4 * sin(2t + pi/6)", \
     f1(x) title "2 * sin(t)", \
     f2(x) title "4 * sin(2t + pi/6) "
```

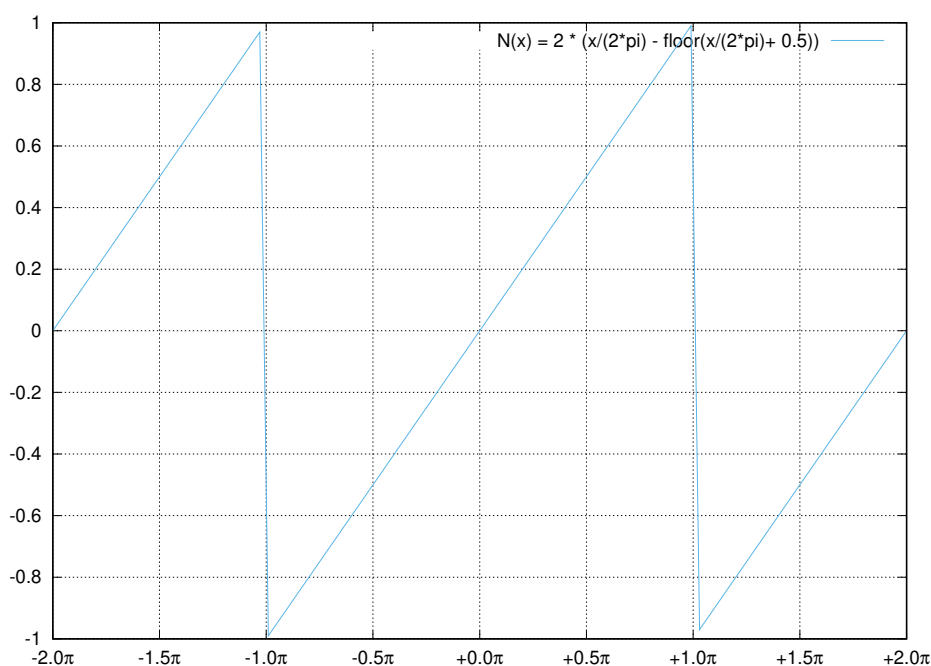


E.2 周期 2π ノコギリ波 $N(x) = 2(x/2\pi - \lfloor(x/2\pi + 1/2)\rfloor)$

E.3 $N(x) = 2(x/2\pi - \lfloor(x/2\pi + 1/2)\rfloor)$ のプログラム (図 10.2)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: f-seN.gplt,v 1.3 2014/12/05 10:43:39 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./f-seN.ps"
set grid
set xrange[-2*pi:2*pi]
set xtics -2*pi,pi/2,2*pi
set format x "%+.1P{/Symbol p}"

N(x) = 2 * (x/(2*pi) - floor(x/(2*pi)+ 0.5))
plot N(x) title "N(x) = 2 * (x/(2*pi) - floor(x/(2*pi)+ 0.5))" with line ls 3
```



どうも手元の `gnuplot` では,

$$N(x) = 2 * (x/(2\pi) - \text{floor}(x/(2\pi) + 1/2))$$

とする, つまり, 0.5 ではなく $1/2$ をつかうとうまく行かない (0 に扱われるようだ). ちょっとまごつく.

E.4 δ 関数ならんた楕円関数のイメージのプログラム (図 10.3)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
```

```

# $Id: comb.gplt,v 1.4 2014/12/09 08:05:30 hisasima Exp $
#

DF = "comb.dat"
PS = "comb.ps"

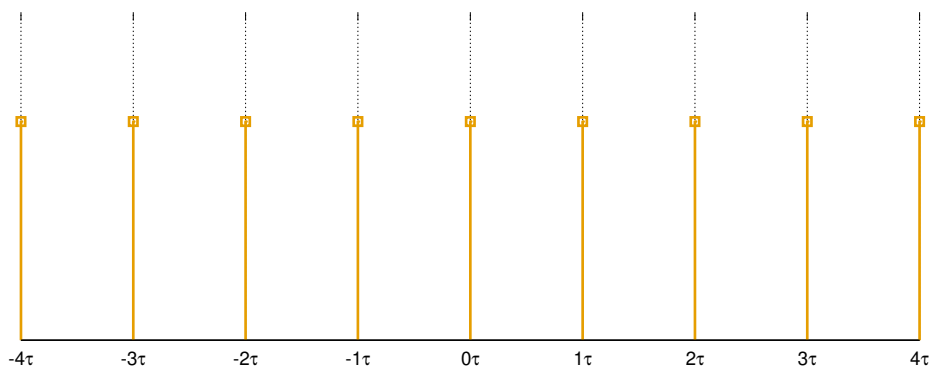
set terminal push

f(x) = 2
set xrange [-4:4]
set xtics -4,1,4
set yrange [-1:5]
set samples 9
set table
set output DF
plot f(x)

set terminal pop
unset table

set terminal postscript eps enhanced color size 5in,2in
set output PS
set grid
set xrange [-4:4]
set yrange [0:3]
set xtics -4,1,4
set border 1
unset ytics
set format x "%.0s{/Symbol t}"
set format y ""
plot DF using 1:2 with impulses lt 4 lw 4 notitle, \
      DF using 1:2 with points lt 4 lw 4 notitle

```



E.5 $2d \cdot \text{sinc}(\lambda d)$ で $d = 3$ のプログラム (図 10.4)

```

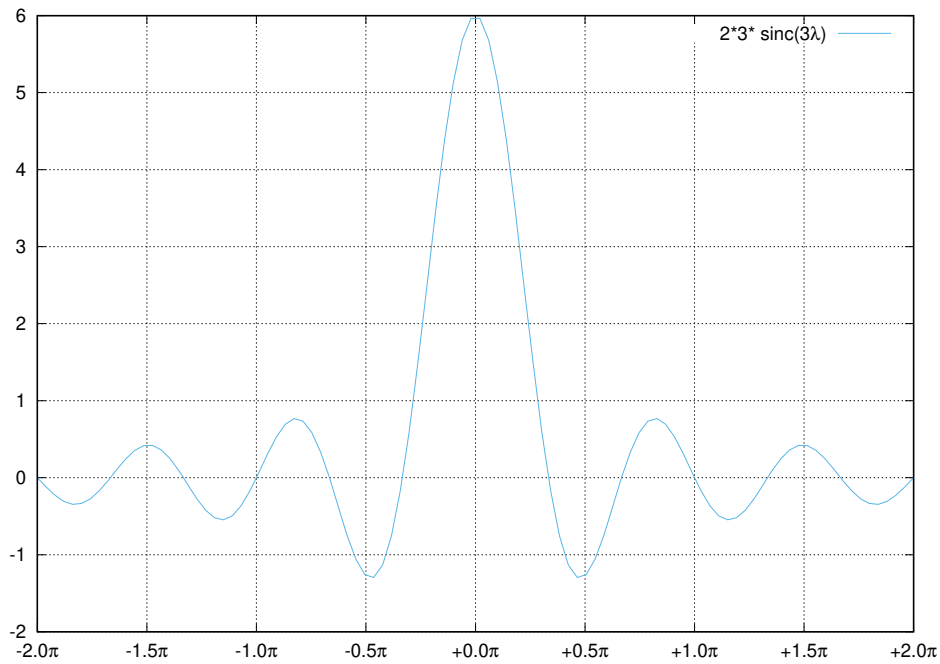
#!/usr/bin/env gnuplot
#

```

```

# $Id: rect.gplt,v 1.3 2014/12/05 10:43:39 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./rect.ps"
set grid
set xrange[-2*pi:2*pi]
set xtics -2*pi,pi/2,2*pi
set format x "%+.1P{/Symbol p}"
plot (2/x)*sin(3*x) title "2*3* sinc(3{/Symbol l})" with lines ls 3

```



E.6 $X(\omega)$ のサンプルグラフその1のプログラム (図 11.1)

```

#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: superpos.gplt,v 1.6 2014/12/09 08:05:30 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color size 5in,2in
set output "./superpos.ps"
set grid
set xrange [-pi:3*pi]
set xtics -pi,pi/2,3*pi
set xtics (" " -pi, " " -pi/2, " " 0, " " pi/2, " " pi, " " 1.5*pi, " " 2*pi, " " 2.5*pi, " " 3*pi)
set yrange [-1:3]
unset ytics
set samples 2000

f(x) = (-pi/6 < x && x < pi) ? cos(x)+1 : 0

```

```

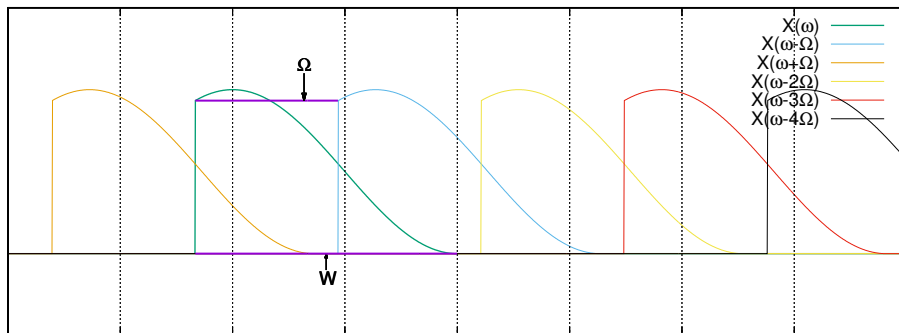
g(x) = (-pi/6 < x && x < (-pi/6 + 2)) ? (cos(-pi/6) + 1) : 1/0
h(x) = (-pi/6 < x && x < pi) ? 0 : 1/0

set label "{/Symbol W}" at 0.9,2.3 # g(x)
set arrow from 1,2.2 to 1,(cos(-pi/6)+1)

set label "W" at (5*pi/12-0.1),-0.3 # h(x)
set arrow from (5*pi/12),-0.2 to (5*pi/12),0

set multiplot
plot f(x) title "X({/Symbol w})" with lines ls 2 lw 2, \
    f(x-2) title "X({/Symbol w}-{/Symbol W})" with lines ls 3, \
    f(x+2) title "X({/Symbol w}+{/Symbol W})" with lines ls 4, \
    f(x-4) title "X({/Symbol w}-2{/Symbol W})" with lines ls 5, \
    f(x-6) title "X({/Symbol w}-3{/Symbol W})" with lines ls 7, \
    f(x-8) title "X({/Symbol w}-4{/Symbol W})" with lines ls 8
plot g(x) notitle with lines ls 1 lw 3
plot h(x) notitle with lines ls 1 lw 3

```



E.7 $X(\omega)$ のサンプルグラフその2のプログラム (図 11.2)

```

#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: superpos1.gplt,v 1.5 2014/12/07 15:46:12 hisasima Exp $
#

set terminal postscript eps enhanced color size 5in,2in
set output "./superpos1.ps"
set grid
set xrange [-pi:3*pi]
set xtics -pi,pi/2,3*pi
set xtics (" " -pi, " " -pi/2, " " 0, " " pi/2, " " pi, " " 1.5*pi, " " 2*pi, " " 2.5*pi, " " 3*pi)
set yrange [-1:3]
unset ytics
set samples 2000

f(x) = (-pi/6 < x && x < pi) ? cos(x)+1 : 0

```

```

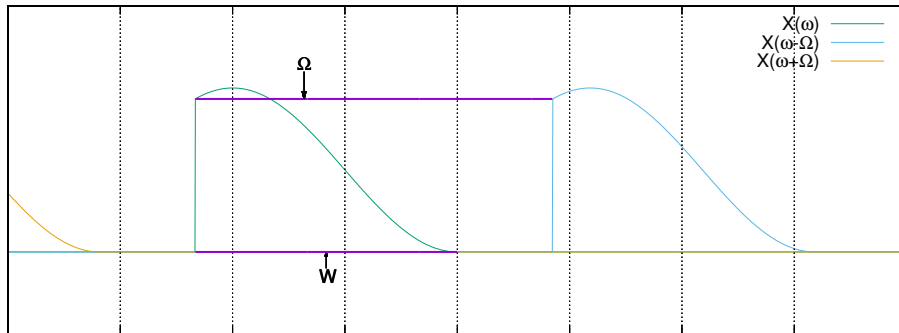
g(x) = (-pi/6 < x && x < (-pi/6 + 5)) ? (cos(-pi/6) + 1) : 1/0
h(x) = (-pi/6 < x && x < pi) ? 0 : 1/0

set label "{/Symbol W}" at 0.9,2.3 # g(x)
set arrow from 1,2.2 to 1,(cos(-pi/6)+1)

set label "W" at (5*pi/12-0.1),-0.3 # h(x)
set arrow from (5*pi/12),-0.2 to (5*pi/12),0

set multiplot
plot f(x) title "X({/Symbol w})" with lines ls 2, \
    f(x-5) title "X({/Symbol w}-{/Symbol W})" with lines ls 3, \
    f(x+5) title "X({/Symbol w}+{/Symbol W})" with lines ls 4
plot g(x) notitle with lines ls 1 lw 3
plot h(x) notitle with lines ls 1 lw 3

```



E.8 $\cos(t)$ のサンプリングのグラフのプログラム (図 11.3)

```

#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: cos-sampling.gplt,v 1.1 2014/12/07 15:46:12 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./cos-sampling.ps"
set grid
set xrange[-3*pi:3*pi]
set xtics -3*pi,pi/2,3*pi
set format x "%+.1P{/Symbol p}"

f0(x) = sin(x)/(x)
f1(x) = -sin(x-pi)/(x-pi)
f2(x) = sin(x-2*pi)/(x-2*pi)
f3(x) = -sin(x-3*pi)/(x-3*pi)
f4(x) = sin(x-4*pi)/(x-4*pi)
f5(x) = -sin(x-5*pi)/(x-5*pi)
f6(x) = sin(x-6*pi)/(x-6*pi)
f7(x) = -sin(x-7*pi)/(x-7*pi)

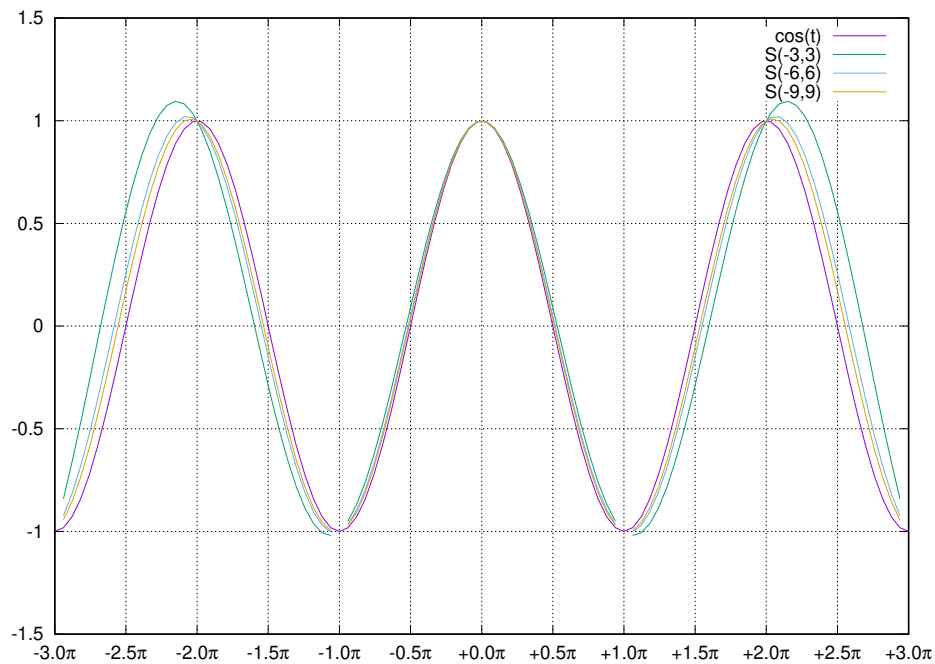
```

```
f8(x) = sin(x-8*pi)/(x-8*pi)
f9(x) = -sin(x-9*pi)/(x-9*pi)
```

```
g1(x) = -sin(x+pi)/(x+pi)
g2(x) = sin(x+2*pi)/(x+2*pi)
g3(x) = -sin(x+3*pi)/(x+3*pi)
g4(x) = sin(x+4*pi)/(x+4*pi)
g5(x) = -sin(x+5*pi)/(x+5*pi)
g6(x) = sin(x+6*pi)/(x+6*pi)
g7(x) = -sin(x+7*pi)/(x+7*pi)
g8(x) = sin(x+8*pi)/(x+8*pi)
g9(x) = -sin(x+9*pi)/(x+9*pi)
```

```
S3(x) = g3(x) + g2(x) + g1(x) + f0(x) + f1(x) + f2(x) + f3(x)
S6(x) = S3(x) + g6(x) + g5(x) + g4(x) + f4(x) + f5(x) + f6(x)
S9(x) = S6(x) + g7(x) + g8(x) + g9(x) + f7(x) + f8(x) + f9(x)
```

```
plot cos(x) title "cos(t)", \
    S3(x) title "S(-3,3)", \
    S6(x) title "S(-6,6)", \
    S9(x) title "S(-9,9)"
```



E.9 $\sin(t)$ のサンプリングのグラフのプログラム (図 11.4)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
```

```

# $Id: sin-sampling.gplt,v 1.1 2014/12/07 15:46:12 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./sin-sampling.ps"
set grid
set xrange[-3*pi:3*pi]
set xtics -3*pi,pi/2,3*pi
set format x "%+.1P{/Symbol p}"

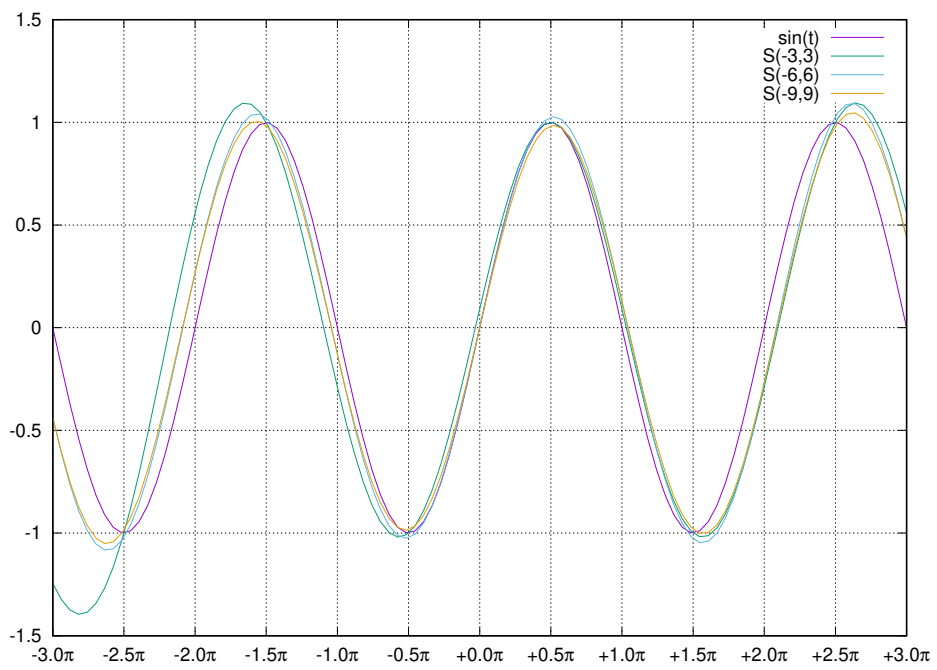
f0(x) = sin(x-pi/2)/(x-pi/2)
f1(x) = -sin(x-3*pi/2)/(x-3*pi/2)
f2(x) = sin(x-5*pi/2)/(x-5*pi/2)
f3(x) = -sin(x-7*pi/2)/(x-7*pi/2)
f4(x) = sin(x-9*pi/2)/(x-9*pi/2)
f5(x) = -sin(x-11*pi)/(x-11*pi)
f6(x) = sin(x-13*pi)/(x-13*pi)
f7(x) = -sin(x-15*pi)/(x-15*pi)
f8(x) = sin(x-17*pi)/(x-17*pi)
f9(x) = -sin(x-19*pi)/(x-19*pi)

g1(x) = -sin(x+pi/2)/(x+pi/2)
g2(x) = sin(x+3*pi/2)/(x+3*pi/2)
g3(x) = -sin(x+5*pi/2)/(x+5*pi/2)
g4(x) = sin(x+7*pi/2)/(x+7*pi/2)
g5(x) = -sin(x+9*pi/2)/(x+9*pi/2)
g6(x) = sin(x-11*pi)/(x-11*pi)
g7(x) = -sin(x-13*pi)/(x-13*pi)
g8(x) = sin(x-15*pi)/(x-15*pi)
g9(x) = -sin(x-17*pi)/(x-17*pi)

S3(x) = g3(x) + g2(x) + g1(x) + f0(x) + f1(x) + f2(x) + f3(x)
S6(x) = S3(x) + g6(x) + g5(x) + g4(x) + f4(x) + f5(x) + f6(x)
S9(x) = S6(x) + g7(x) + g8(x) + g9(x) + f7(x) + f8(x) + f9(x)

plot sin(x) title "sin(t)", \
      S3(x) title "S(-3,3)", \
      S6(x) title "S(-6,6)", \
      S9(x) title "S(-9,9)"

```

E.10 $1 + 3 \cos(t) + \cos(2t)$ のサンプリングのグラフのプログラム (図 11.5)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: cos-sampling2.gplt,v 1.1 2014/12/07 15:46:12 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./cos-sampling2.ps"
set grid
set xrange[-3*pi:3*pi]
set xtics -3*pi,pi/2,3*pi
set format x "%+.1P{/Symbol p}"

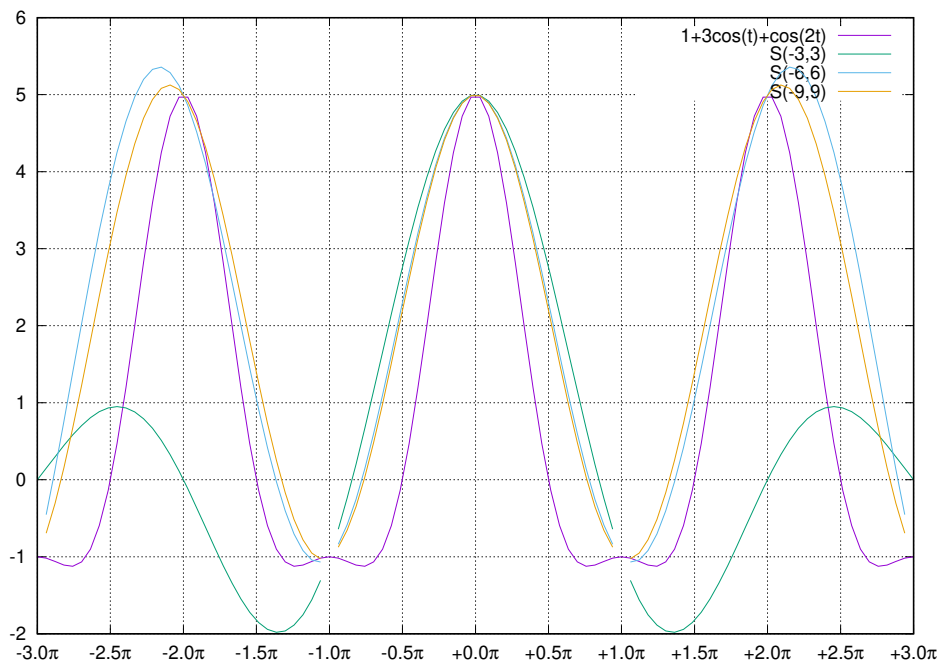
f0(x) = 5*sin(x)/(x)
f1(x) = 0*sin(x-pi/2)/(x-pi/2)
f2(x) = (-1)*sin(x-2*pi/2)/(x-2*pi/2)
f3(x) = 0*sin(x-3*pi/2)/(x-3*pi/2)
f4(x) = 5*sin(x-4*pi/2)/(x-4*pi/2)
f5(x) = 0*sin(x-5*pi/2)/(x-5*pi/2)
f6(x) = (-1)*sin(x-6*pi/2)/(x-6*pi/2)
f7(x) = 0*sin(x-7*pi/2)/(x-7*pi/2)
f8(x) = 5*sin(x-8*pi/2)/(x-8*pi/2)
f9(x) = 0*sin(x-9*pi/2)/(x-9*pi/2)

g1(x) = 0*sin(x+pi/2)/(x+pi/2)
g2(x) = (-1)*sin(x+2*pi/2)/(x+2*pi/2)
g3(x) = 0*sin(x+3*pi/2)/(x+3*pi/2)
g4(x) = 5*sin(x+4*pi/2)/(x+4*pi/2)
g5(x) = 0*sin(x+5*pi/2)/(x+5*pi/2)
g6(x) = (-1)*sin(x+6*pi/2)/(x+6*pi/2)
g7(x) = 0*sin(x+7*pi/2)/(x+7*pi/2)
g8(x) = 5*sin(x+8*pi/2)/(x+8*pi/2)
g9(x) = 0*sin(x+9*pi/2)/(x+9*pi/2)

S3(x) = g3(x) + g2(x) + g1(x) + f0(x) + f1(x) + f2(x) + f3(x)
S6(x) = S3(x) + g6(x) + g5(x) + g4(x) + f4(x) + f5(x) + f6(x)
S9(x) = S6(x) + g7(x) + g8(x) + g9(x) + f7(x) + f8(x) + f9(x)

f(x) = 1 + 3 * cos(x) + cos(2*x)

plot f(x) title "1+3cos(t)+cos(2t)", \
      S3(x) title "S(-3,3)", \
      S6(x) title "S(-6,6)", \
      S9(x) title "S(-9,9)"
```

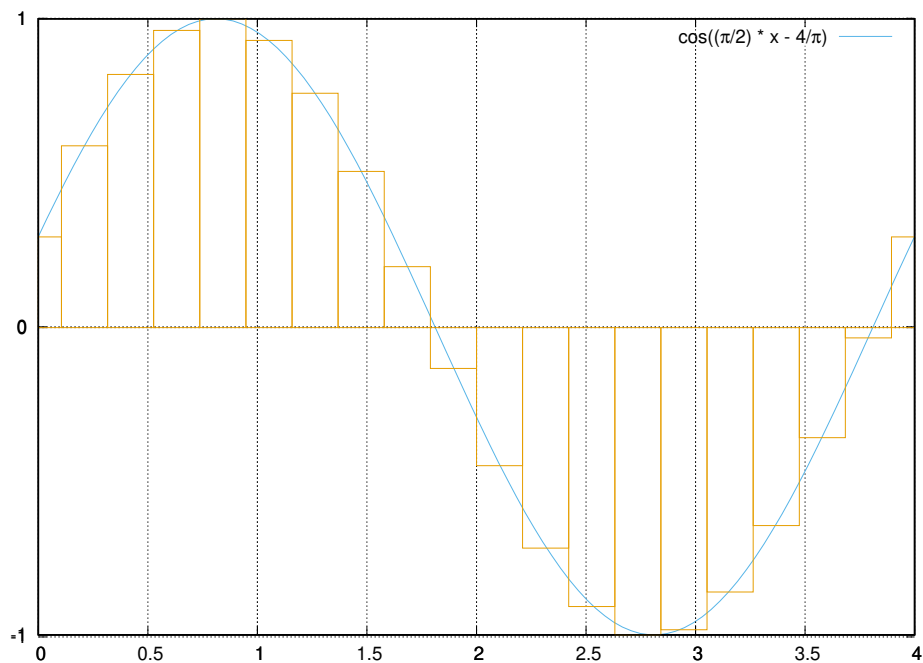


E.11 短冊長方形をはめ込んだグラフのプログラム (図 C.1)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: cos2L.gplt,v 1.1 2014/09/09 08:21:20 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./cos2L.ps"
set grid
set xrange[0:4]
set ytics -1,1,1
set multiplot

C(x) = cos(pi/2 * x - 4/pi)
plot C(x) title "cos(({/Symbol p}/2) * x - 4{/Symbol p})" with lines ls 3

set samples 20
set xtics 0,1,4
plot C(x) notitle with boxes ls 4
```



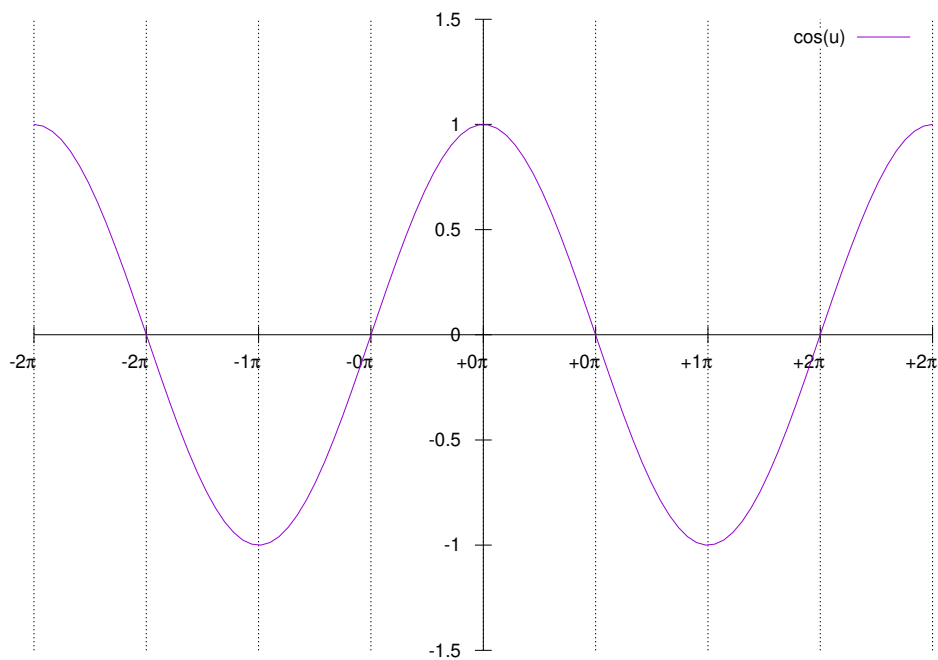
E.12 $\cos(u)$ のグラフのプログラム (図 D.1)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: wave-sT.gplt,v 1.2 2014/09/21 16:32:14 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./wave-sT.ps"
set border 0

set grid xtics
set xrange[-2*pi:2*pi]
set xtics -2*pi,pi/2,2*pi axis offset -1,0
set xzeroaxis linetype -1
set format x "%+.0P{/Symbol p}"

set yrange [-1.5:1.5]
set ytics -1.5,0.5,1.5 axis offset -1,0
set yzeroaxis linetype -1

plot cos(x) title "cos(u)"
```



E.13 $\cos(u), \cos(u/2), \cos(u/3)$ を同時に表示したグラフのプログラム (図 D.2)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: wave-mT.gplt,v 1.2 2014/09/21 16:32:14 hisasima Exp $
```

```

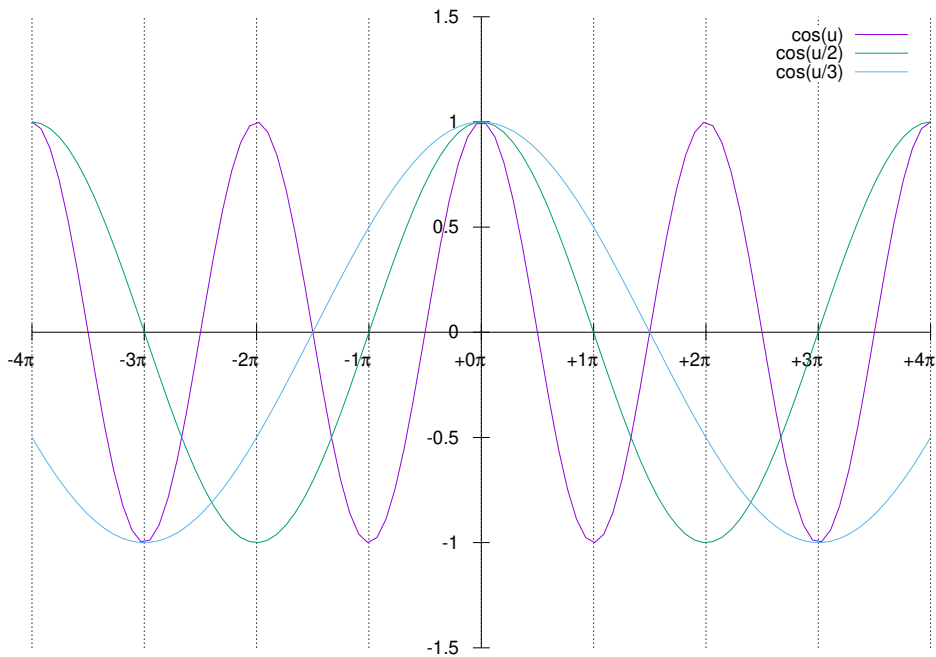
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./wave-mT.ps"
set border 0
set multiplot

set grid xtics
set xrange[-4*pi:4*pi]
set xtics -4*pi,pi,4*pi axis offset -1,0
set xzeroaxis linetype -1
set format x "%+.0P{/Symbol p}"

set yrange [-1.5:1.5]
set ytics -1.5,0.5,1.5 axis offset -1,0
set yzeroaxis linetype -1

plot cos(x) title "cos(u)", cos(x/2) title "cos(u/2)", cos(x/3) title "cos(u/3)"

```



E.14 負の振動数の解釈イメージのプログラム (図 D.3)

```

#!/usr/bin/env gnuplot
#
# $Id: circle.gplt,v 1.1 2014/09/21 16:32:14 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./circle.ps"
set border 0
set multiplot

```

```

set size square
# default samples is 100.
set samples 2000

set grid xtics
set xrange[-1.5:1.5]
set xtics -1.5,1,1.5 axis offset -1,0
set xzeroaxis linetype -1

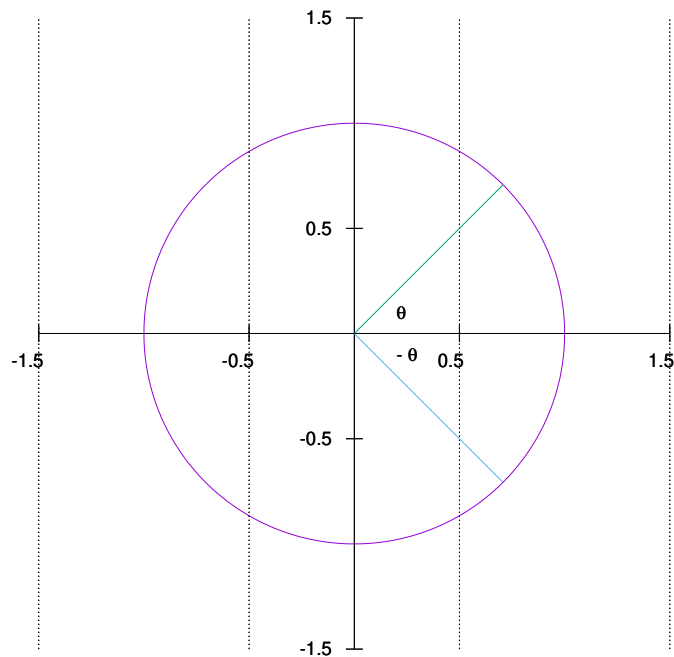
set yrange [-1.5:1.5]
set ytics -1.5,1,1.5 axis offset -1,0
set yzeroaxis linetype -1

set label "{/Symbol q}" at 0.2,0.1
set label "- {/Symbol q}" at 0.2,-0.1

set parametric
set trange [0:2*pi]
plot cos(t),sin(t) notitle

unset parametric
f(x) = (0 < x && x < 1/sqrt(2)) ? x : 1/0
g(x) = (0 < x && x < 1/sqrt(2)) ? -x : 1/0
plot f(x) notitle with lines ls 2, g(x) notitle with lines ls 3

```



E.15 x を固定化した波動イメージのプログラム (図 D.4)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
```

```

#
# $Id: wave-t.gnuplt,v 1.1 2014/09/20 10:08:18 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./wave-t.ps"
set border 0
set multiplot

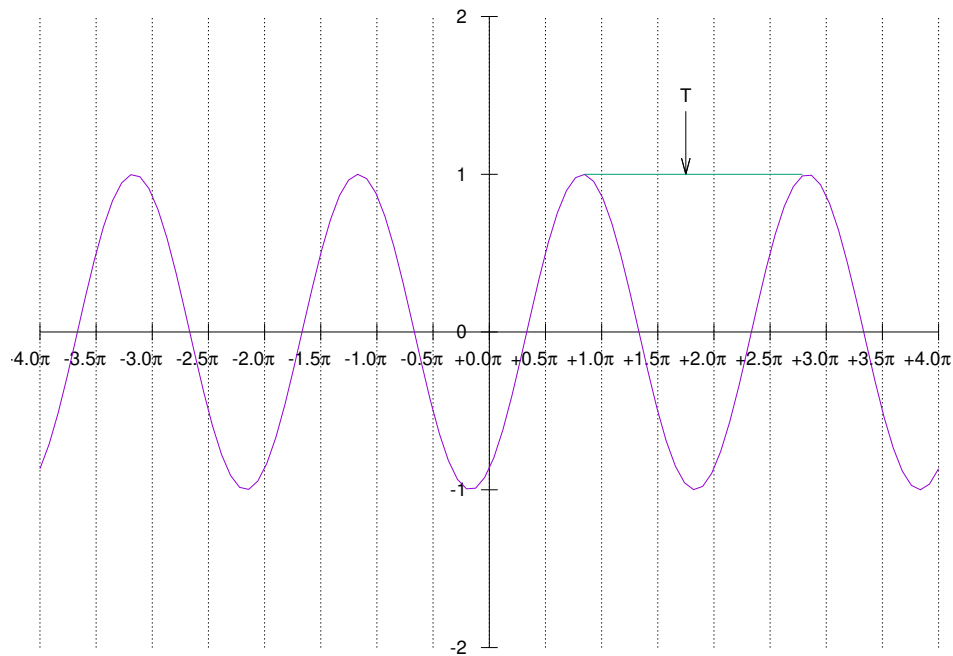
set grid xtics
set xrange[-4*pi:4*pi]
set xtics -4*pi,pi/2,4*pi axis offset -1,0
set xzeroaxis linetype -1
set format x "%+.1P{/Symbol p}"

set yrange [-2:2]
set ytics -2,1,2 axis offset -1,0
set yzeroaxis linetype -1

set label "T" at 1.7*pi,1.5
set arrow from 1.75*pi,1.4 to 1.75*pi,1

f(x) = (5*pi/6 < x && x < 17*pi/6) ? 1 : 1/0
#plot sin(x-pi/3) title "sin(t -{/Symbol p}/3)" with lines ls 3, f(x) with lines 1
plot sin(x-pi/3) notitle, f(x) notitle

```



E.16 t を固定化した波動イメージのプログラム (図 D.5)

```
#!/usr/bin/env gnuplot
```



```

#
# $Id: wave-x.gplt,v 1.2 2014/09/21 16:32:14 hisasima Exp $
#
set terminal postscript eps enhanced color
set output "./wave-x.ps"
set border 0
set multiplot

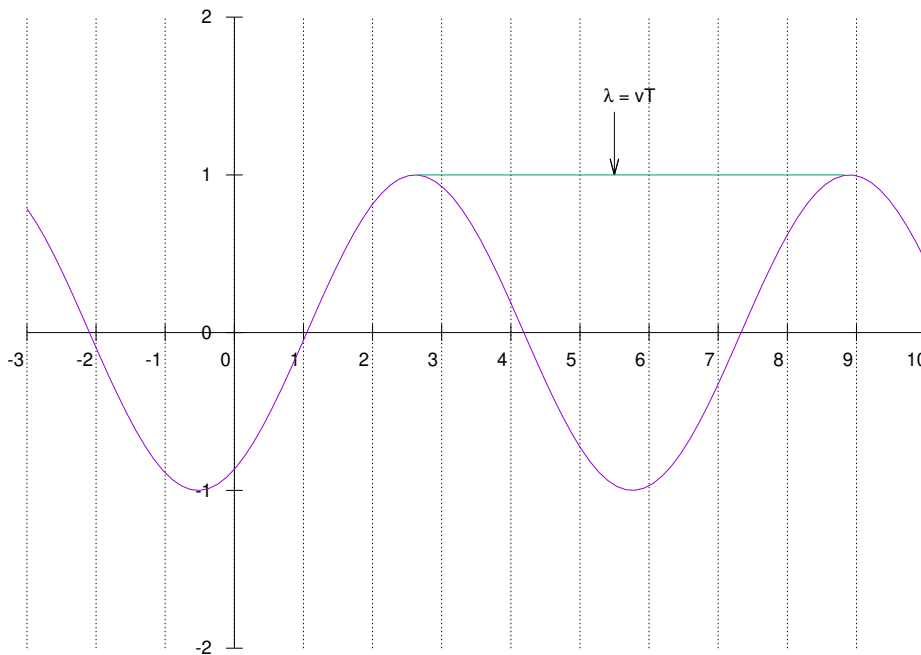
set grid xtics
set xrange[-3:10]
set xtics -3,1,10 axis offset -1,0
set xzeroaxis linetype -1

set yrange [-2:2]
set ytics -2,1,2 axis offset -1,0
set yzeroaxis linetype -1

set label "{/Symbol l} = vT" at 1.7*pi,1.5
set arrow from 1.75*pi,1.4 to 1.75*pi,1

f(x) = (5*pi/6 < x && x < 17*pi/6) ? 1 : 1/0
#plot sin(x-pi/3) title "sin(x - {/Symbol p}/3)" with lines ls 3, f(x) notitle
plot sin(x-pi/3) notitle, f(x) notitle

```



参考文献

- [1] 奥村 晴彦. 『[改訂第 5 版] $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ 美文書作成入門』. 株式会社技術評論社, 第 5 版, 2012. (第 5 版第 4 刷 (2012) を参照した).
- [2] 久島 広幸. 『エルミート内積空間のスペクトル分解, 固有ベクトルと固有関数までの道のり』. <http://www.hisasima.jp/studynote/hermite.pdf>, 2014.
- [3] 鏡 慎吾. 『やる夫で学ぶデジタル信号処理』. 2013. <http://www.ic.is.tohoku.ac.jp/~swk/lecture/yaruodsp/>.
- [4] 後藤 憲一, 山本 邦夫, 神吉 健. 『詳解 物理／応用 数学演習』. 共立出版株式会社, 初版, 1979. (初版第 1 刷 (1979) を参照した).
- [5] 佐藤 敏明. 『図解雑学 フーリエ変換』. 株式会社ナツメ社, 2011.
- [6] 山本 義隆. 『物理入門』. 駿台文庫株式会社, 初版, 1989. (初版第 6 刷 (1989) を参照した).
- [7] 山本 昌志. 『gnuplot の精義』. 株式会社カットシステム, 初版, 2009. (初版第 1 刷 (2009) を参照した).
- [8] 小針 岷宏. 『確率・統計入門』. 岩波書店, 1973. (第 9 刷 (1980) を参照した).
- [9] 森 毅. 『現代の古典解析』. 日本評論社, 第 1 版, 1985. (第 1 版第 2 刷 (1995) を参照した).
- [10] 生田 誠三. 『 $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ 文典』. 株式会社朝倉書店, 初版, 2007. (初版第 7 刷 (2007) を参照した).