Darboux の定理による積分世界の構築

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2023/11/20

1　イントロダクション

【定理】有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義された関数の集まり（関数族）を考える．その中の任意の関数 $f(x)$ について，

$$f(x) \text{ は有界閉区間 } I \text{ で連続である} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ は積分可能である .}$$

（ただし，この逆（つまり $\Longleftarrow$ 方向）は成り立たない．要注意）

という有名な定理がある．

能書を先に書くと，あの Reimann でさえもが，有限閉区間上の連続関数が Reimann 可積分であることの証明はできなかったらしい[*1]．つまり Reimann はこの定理の証明に至らなかったのだ．ならば，現代では，いったいそれはどのようにして証明されているのか，ということが知りたくなった．少し調べてみたら，Darboux の定理から始まって積分世界にいきつくらしいことがわかった．その道のりは山と谷だらけかも知れないが，とりあえずやってみるしかあるまい，と思って本稿を書き始めた．とはいえ，基本が不足しているのはあきらかなので，`http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/kaisekikiso/node28.html` をシェルパとしてその道を歩いた（筆者なりの写経であるといってもよいかもしれない)[*2]．以下その記録である．

2　Darboux の定理までの準備，記号の用意

2.1　議論の前提

Darboux の定理と有界閉区間での関数の可積分の証明までの道のりを記す本稿では，対象とする関数について以下の前提をもって臨む：

- 議論対象の有界閉区間を $I = [a, b]$ とする（ただし，$a < b$).
- 議論対象の関数 $f(x)$ は，I で定義されている．
- 議論対象の関数 $f(x)$ は，I で有界である．

$f(x)$ が（区間 I で）有界である，という前提は必須であり大事である．そうでないと，これから先の議論は，絵に描いた餅のごとくなりたたない．

*1 森毅の言説の概略である．正式な引用は，証明と絡めて，5.1.3 (p.17) 節に記した．

*2 このコンテンツには大変おせわになった．これを読んでなぞることにより，新しい発見がたくさん得られ．とても良い勉強になった．著者のお名前にたどり着けなかったのでこのような紹介になってしまっている．失礼があればお許しいただきたい．なお，本文中でこのコンテンツに言及するときには，「シェルパ」と書く．

この有界な関数 $f(x)$ の関数値の上限を M，下限を m とあらわすことにする．格好よく書けば

$$M = \sup_{x \in I} f(x) \ , \quad m = \inf_{x \in I} f(x)$$

である[*3]．しごく当然の事実であるが，

$$m \le f(x) \le M \quad (\text{for all } x \in I) \ .$$

2.2 記号の整理

区間 $I = [a, b]$ を複数の小区間に分けることを「分割」という．その際には，小区間どうしで共有する区間はないものとする．

I を n 個の小区間に分割したものを Δ と書く．この Δ は，その分割点を x_i として

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

とあらわされる．この分割点を，文脈によっては「区間分割点」ということもある．そして，このようにあらわされる分割全てからなる集合を $\mathbb{D}$ とする．したがって，もちろん，$\Delta \in \mathbb{D}$ である．

分割 Δ によって区切られた各々の区間を「小区間」と呼ぶ．この小区間は次のようにあらわされる：

$$I_i := [x_{i-1}, x_i] \ ,$$
$$I_1 = [x_0, x_1], \ \ I_2 = [x_1, x_2], \ \ \ldots, \ \ I_n = [x_{n-1}, x_n] \ .$$

この取り決めから，連続した小区間について

$$I_i \cup I_{i+1} = [x_{i-1}, x_i] \cup [x_i, x_{i+1}] = [x_{i-1}, x_i] + [x_i, x_{i+1}] = [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

が成り立つことがわかる．

小区間 I_i の幅（大きさ，長さと言ったりするかもしれない）は

$$|I_i| := x_i - x_{i-1} \ ,$$
$$|I_1| = x_1 - x_0, \ \ |I_2| = x_2 - x_1, \ \ \ldots, \ \ |I_n| = x_n - x_{n-1}$$

とあらわされる．この取り決めからあきらかに $|I_i| > 0$ (for all i) である[*4]．くわえて，分割全体を考慮して

$$|\Delta| := \max_i |I_i| = \max_i (x_i - x_{i-1})$$

とあらわす．分割の大きさをあらわす指標のひとつであると言って良いと思う．

2.3 焦点とする量

これから活躍する（活躍してもらう）量を定義しよう．

► M_i, m_i ◄

小区間 I_i における $f(x)$ の上限を M_i，下限を m_i と書く：

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) \quad (= \sup \{ \, f(x) \mid \text{for all } x \in I_i \, \}) \ ,$$
$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) \quad (= \inf \{ \, f(x) \mid \text{for all } x \in I_i \, \}) \ .$$

[*3] これら sup, inf の書き方として，集合そのものを記す例にもよくお目にかかる．今の例で言えば，関数 $f(x)$ の関数値の集合を $\{ \, f(x) \mid \text{for all } x \in I \, \}$ として，$M = \sup \{ \, f(x) \mid \text{for all } x \in I \, \}$ のように書く形である．

[*4] 余興的蛇足をひとつ．$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [a, b] \ , \quad \sum_{i=1}^{n} |I_i| = x_n - x_0 = b - a \ .$

したがって，小区間 I_i でも，

$$m_i \le f(x) \le M_i \quad (\text{for all } x \in I_i)\ .$$

また，$m, M,$ の定義を援用すれば，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ において

$$m \le m_i \le M_i \le M \tag{2.1}$$

である．これは，

> 小区間の上限は，区間全体の上限より大きくはならない（$M_i \le M$）
> 小区間の下限は，区間全体の下限より小さくはならない（$m \le m_i$）

という事実の表明に過ぎない．

► $(S_\Delta)_{I_i}$, $(s_\Delta)_{I_i}$, S_Δ, s_Δ ◄

小区間 I_i での上限と幅の積を $(S_\Delta)_{I_i}$，下限と幅の積を $(s_\Delta)_{I_i}$ と書く．これが

$$(S_\Delta)_{I_i} = M_i\,|I_i|\ , \quad (s_\Delta)_{I_i} = m_i\,|I_i|$$

であるということは，今までの記号と量の定義からあきらかだ．また，複数の小区間を対象とする場合，たとえば I_i と I_j を対象とする場合には

$$\begin{aligned}(S_\Delta)_{I_i \cup I_j} &= (S_\Delta)_{I_i} + (S_\Delta)_{I_j} = M_i\,|I_i| + M_j\,|I_j|\ ,\\ (s_\Delta)_{I_i \cup I_j} &= (s_\Delta)_{I_i} + (s_\Delta)_{I_j} = m_i\,|I_i| + m_j\,|I_j|\end{aligned}$$

となるし，このように書けるのもこの定義からあきらかだと言ってよいだろう[*5]．

これらを全区間（すなわち定義域）にわたって足し合わせたものとして，S_Δ と s_Δ を定義する[*6]．すなわち

$$S_\Delta = (S_\Delta)_{\bigcup_i I_i} = \sum_{i=1}^{n} M_i\,|I_i|\ , \quad s_\Delta = (s_\Delta)_{\bigcup_i I_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,|I_i|\ .$$

不等式 (2.1) (p.3) に，各小区間の幅 $|I_i|$ をかけると（$|I_i| > 0$ であるから不等号の向きには影響を与えない）

$$m\,|I_i| \le m_i\,|I_i| \le M_i\,|I_i| \le M\,|I_i|$$

である．i について和を取れば

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m\,|I_i| \le \sum_{i=1}^{n} m_i\,|I_i| &\le \sum_{i=1}^{n} M_i\,|I_i| \le \sum_{i=1}^{n} M\,|I_i|\\ \therefore\ m\sum_{i=1}^{n}|I_i| \le s_\Delta &\le S_\Delta \le M\sum_{i=1}^{n}|I_i|\\ \therefore\ m(b-a) \le s_\Delta &\le S_\Delta \le M(b-a)\end{aligned} \tag{2.2}$$

となる（さっきも脚注に書いたけど，$\sum_{i=1}^{n}|I_i| = b-a$ は問答無用でいいよね）．

ここで大事なところは，どのような分割 Δ であっても，$s_\Delta \le S_\Delta$ であるということである．これも今までの約束事から当然なことではあるのだが．

► S, s ◄

S_Δ, s_Δ は，分割 Δ の様態によって様々な値をとりうるだろう．けれども，(2.2) (p.3) の結果からわかるように，最

[*5] こう言い切って良い理由は，分割の小区間の定義では，2つの小区間が共通の区間を持たないものとしたかたである．え？ I_i と I_{i+1} と繋がっている場合はどうなるかって？この $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ と $I_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]$ の共通部分は x_i という点のみで，「幅（大きさ）」は持たないから（すなわち区間ではないから），$(S_\Delta)_{I_i \cup I_{i+1}} = (S_\Delta)_{I_i} + (S_\Delta)_{I_{i+1}} = M_i\,|I_i| + M_{i+1}\,|I_{i+1}|$ として問題ないのである．

[*6] S_Δ には「過剰和，Reimann 上和」，s_Δ には「不足和，Reimann 下和」という呼び名がついているらしい．

左辺と最右辺は分割 Δ への依存性はまったくない．したがって，どのような分割 Δ であろうとも，S_Δ, s_Δ ともに有界であるということがわかる．したがって，**実数の連続性の公理**から，おのおのに上限，下限が定まる．それらのうち，S と s を次のように定める：

$$S := \inf_{\Delta\in\mathbb{D}} S_\Delta \quad \text{（「小区間の上限 } M_i \text{ を使っている } S_\Delta \text{」 の下限）}$$
$$s := \sup_{\Delta\in\mathbb{D}} s_\Delta \quad \text{（「小区間の下限 } m_i \text{ を使っている } s_\Delta \text{」の上限）}$$

3　細分といくつかの補題

3.1　細分

分割 Δ をより細かくすることを考えることがここの本題である．

２つの分割

$$\begin{aligned}\Delta\ &: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\\ \Delta' &: a = y_0 < y_1 < \cdots\cdots < y_{m-1} < y_m = b\end{aligned}$$

を考えよう．この２つの分割において

$$\{\, x_i \mid i = 1, 2, \ldots, n \,\} \subset \{\, y_j \mid j = 1, 2, \ldots, m \,\}$$

となっているとき，

　　分割 Δ' は，分割 Δ の細分である

という．部分集合の関係になっているところが重要である．すなわち，Δ' は Δ の分割の点すべてを含んでいて，かつ，それよりも分割の個数が多い（言い換えれば少区間の個数が多い)，ということである[*7]．そして，この細分の関係を，不等号記号を使って

$$\Delta < \Delta'$$

と書き記す．細分の方が「大きい」ことに注意．一方で，細分するという操作を観察すれば，小区間の幅が大きくなるということはないし，最大幅を持つ小区間を細分するのであれば，小区間の最大幅は小さくなる．したがって，分割の大きさをあらわす指標 $|\Delta|$ については

$$\Delta < \Delta' \implies |\Delta'| \leq |\Delta|$$

となる．

3.2　細分したときの S_Δ と s_Δ

細分と，S_Δ と s_Δ の関係を示す補題である．

補題 3.1. 分割 Δ' が分割 Δ の細分であるとする．そのとき，

$$\begin{aligned}S_{\Delta'} &\leq S_\Delta \qquad \text{（細分されると小さくなる）},\\ s_\Delta &\leq s_{\Delta'} \qquad \text{（細分されると大きくなる）}.\end{aligned}$$

[*7] 本文での書き方は，かなりおしゃれな書き方である．ペダンティックと言ってもいいかもしれない．もっともシンプルな細分は，$\Delta' : a = x_0 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k < \cdots < x_n = b$ というように，c という区間分割点をひとつ増やしたものであろう．

証明． 分割 Δ の少区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ だけが 2 つに細分されている分割を Δ' とする（細分のもっとも簡単なモデルである）．つまり，小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ のみが

$$x_{i-1} < c < x_i \qquad \text{i.e.} \quad [x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, c] \cup [c, x_i]$$

と細分されているとするのである．このもっともシンプルな細分化で補題が成り立っていれば，複数個に細分化されても成り立つことはあきらかかだ．

分割 Δ では

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

である．Δ' については，細分されたおのおのの小区間での $f(x)$ の上限を

$$M_\alpha = \sup_{x \in [x_{i-1}, c]} f(x) \ , \quad M_\beta = \sup_{x \in [c, x_i]} f(x)$$

とあらわすことにしておこう．ここであきらかなことは，細分されたとはいっても，M_α か M_β のうちどちらかは M_i と等しい．ということである，もちろん両方とも等しいということもある．決して生じ得ないのは「どちらもが M_i より大きくなる」ということだ．したがって，

$$M_i \geq M_\alpha \ , \quad M_i \geq M_\beta$$

が成り立っている．

まず分割 Δ では

$$(S_\Delta)_{[x_{i-1}, x_i]} = M_i(x_i - x_{i-1})$$

である．また，分割 Δ' では $[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, c] \cup [c, x_i]$ であることを利用すると

$$(S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, x_i]} = (S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, c] \cup [c, x_i]} = (S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, c]} + (S_{\Delta'})_{[c, x_i]} = M_\alpha(c - x_{i-1}) + M_\beta(x_i - c)$$

となる[*8]．差をとれば

$$\left.\begin{aligned} (S_\Delta)_{[x_{i-1}, x_i]} - (S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, x_i]} &= M_i(x_i - x_{i-1}) - (M_\alpha(c - x_{i-1}) + M_\beta(x_i - c)) \\ &= M_i(x_i - c + c - x_{i-1}) - (M_\alpha(c - x_{i-1}) + M_\beta(x_i - c)) \\ &= M_i(x_i - c) + M_i(c - x_{i-1}) - M_\alpha(c - x_{i-1}) - M_\beta(x_i - c) \\ &= (M_i - M_\alpha)(c - x_{i-1}) + (M_i - M_\beta)(x_i - c) \\ &\geq 0 \quad \text{（括弧の中身はどれも 0 以上であることから）．} \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

そして I_i 以外の小区間 I_j は細分されていないので $(S_\Delta)_{I_J} = (S_{\Delta'})_{I_j}$ であるはずだ．したがって，全体に対する寄与は I_i の分だけとなり，

$$\begin{gathered} S_\Delta - S_{\Delta'} = (M_i - M_\alpha)(c - x_{i-1}) + (M_i - M_\beta)(x_i - c) \geq 0 \\ \therefore \quad S_\Delta \geq S_{\Delta'} \ . \end{gathered}$$

つまり細分されると小さくなるのである[*9]．

同様のことを m_i でやると，まず

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

[*8] 大小関係のみを評価したいのであれば，次の式変形だけでもよい：

$$\begin{aligned} (S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, x_i]} &= (S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, c] \cup [c, x_i]} = (S_{\Delta'})_{[x_{i-1}, c]} + (S_{\Delta'})_{[c, x_i]} \\ &= M_\alpha(c - x_{i-1}) + M_\beta(x_i - c) \\ &\leq M_i(c - x_{i-1}) + M_i(x_i - c) = M_i(x_i - x_{i-1}) = (S_\Delta)_{[x_{i-1}, x_i]} \ . \end{aligned}$$

本文では，補題 3.3 (p.7) の証明で利用しやすいように (3.1) (p.5) の形式まで計算した．

[*9] 小区間ひとつが細分化されてもこのような結果になるのだから，複数の小区間が同時に細分化されても同じことになることは察しがつく．同時に細分化されるという考え方に馴染めないのならば，細分化される小区間はひとつに限定して，それを何回も繰り返していけばよい（また蛇足を書いてしまった）．

であり，またここでも

$$m_\alpha = \inf_{x\in[x_{i-1},c]} f(x)\ , \quad m_\beta = \inf_{x\in[c,x_i]} f(x)$$

とおくことにすれば，それ以降の理路は，sup が inf になるので，不等号の向きが変わることになる．上の結果の検算の意味も込めて，順にそれをみていこう．まずあきらかに

$$m_i \le m_\alpha\ , \quad m_i \le m_\beta$$

であり，

$$\begin{aligned}
&(s_\Delta)_{[x_{i-1},x_i]} = m_i(x_i - x_{i-1})\\
&(s_{\Delta'})_{[x_{i-1},x_i]} = (s_{\Delta'})_{[x_{i-1},c]\cup[c,x_i]} = (s_{\Delta'})_{[x_{i-1},c]} + (s_{\Delta'})_{[c,x_i]} = m_\alpha(c - x_{i-1}) + m_\beta(x_i - c)
\end{aligned}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}
(s_{\Delta'})_{[x_{i-1},x_i]} - (s_\Delta)_{[x_{i-1},x_i]} \quad &= m_\alpha(c - x_{i-1}) + m_\beta(x_i - c) - m_i(x_i - x_{i-1})\\
&= m_\alpha(c - x_{i-1}) + m_\beta(x_i - c) - m_i(x_i - c + c - x_{i-1})\\
&= m_\alpha(c - x_{i-1}) + m_\beta(x_i - c) - m_i(x_i - c) - m_i(c - x_{i-1})\\
&= (m_\alpha - m_i)(c - x_{i-1}) + (m_\beta - m_i)(x_i - c)\\
&\ge 0 \quad \text{（括弧の中身はどれも 0 以上であることから）．}
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

そして， I_i 以外の小区間 I_j は細分されていないので $(s_\Delta)_{I_J} = (s_{\Delta'})_{I_j}$ であり，全体に対する寄与は I_i の分だけとなるから

$$s_{\Delta'} - s_\Delta = (m_\alpha - m_i)(c - x_{i-1}) + (m_\beta - m_i)(x_i - c) \ge 0$$

したがって，全区間においても

$$s_{\Delta'} \ge s_\Delta$$

である．こちらは細分されると大きくなるのである． □

3.3 細分を使って S と s の関係を導き出す

補題 3.2. $S\ (= \inf_{\Delta\in\mathbb{D}} S_\Delta)$ と $s\ (= \sup_{\Delta\in\mathbb{D}} s_\Delta)$ の間には，常に $s \le S$ という関係がある．

証明. 任意の 2 つの異なる分割

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\\
&\Delta_2 : a = y_0 < y_1 < \cdots\cdots < y_{m-1} < y_m = b
\end{aligned}$$

を用意しよう．「異なる」とは，Δ_1 と Δ_2 について「分割の区間分割点すべてが等しい」ということはない，ということを述べている．ちなみに，この 2 つの分割の間に細分の関係があってもなくても構わない．ただ異なっていればいい．

さていまここで，$\Delta' = \{\, x_i \mid i = 1, \ldots, n \,\} \cup \{\, y_j \mid j = 1, \ldots, m \,\}$ というように作成した分割 Δ' を考える．この Δ' は，Δ_1 の細分であり，かつ，Δ_2 の細分にもなっていることがわかる．区間 $[a,b]$ の中に x_i と y_j を並べることを想定すれば，細分であることは容易に理解できよう．したがって

$$\Delta_1 < \Delta' \quad \text{だから} \quad \begin{cases} S_{\Delta'} \le S_{\Delta_1} \\ s_{\Delta_1} \le s_{\Delta'} \end{cases}$$

$$\Delta_2 < \Delta' \quad \text{だから} \quad \begin{cases} S_{\Delta'} \le S_{\Delta_2} \\ s_{\Delta_2} \le s_{\Delta'} \end{cases}$$

(2.2) (p.3) の結果を Δ' に援用すれば $s_{\Delta'} \le S_{\Delta'}$ であるからこれらをあわせて

$$\left.\begin{array}{l} s_{\Delta_1} \\ s_{\Delta_2} \end{array}\right\} \le s_{\Delta'} \le S_{\Delta'} \le \left\{\begin{array}{l} S_{\Delta_1} \\ S_{\Delta_2} \end{array}\right.$$

が得られ,

> 任意の分割 Δ_1 での s_{Δ_1} は，任意の分割 Δ_2 での S_{Δ_2} より大きくはならない（Δ_1 と Δ_2 を入れ替えても当然同じ）.

を示すことができた．したがて，どのような分割を持ってきてもこれが成り立つのだから，分割すべてを対象としてこの結果を一般化すれば,

$$\sup_{\Delta \in \mathbb{D}} s_\Delta \le \inf_{\Delta \in \mathbb{D}} S_\Delta \qquad \text{i.e.} \quad s \le S$$

となるのである． □

いやちょっとまてよ．(2.2) (p.3) から $s_\Delta \le S_\Delta$ は言えてたから，それをそのまま使えばよかったんじゃないのか？そう思いたくもなるが，(2.2) (p.3) は，分割 Δ を固定して，そのときの状況を述べていたにすぎないのだ．その大小の結果関係を，どのような分割に対してもなりたつことを示すために分割の細分という手法を導入し，それを利用して今見てきたように不等式の関係を導出したのである．うう，用意周到というか，回りくどいというか.

3.4 細分して小区間が p 個増えたとき

細分して小区間が p 個増えたときには，次の補題が成立する.

補題 3.3. 任意の分割 Δ_0 にたいして，p 個の異なる分割点（区間分割点）を加えて細分化した分割を Δ_p とする（細分に利用する p 個の分割点は Δ_0 の分割点にはなっていない点であるとしておく．その方が話が簡単だ).
そのとき

$$\begin{aligned} S_{\Delta_0} - S_{\Delta_p} &\le (M-m)p\,|\Delta_0|\ , \\ s_{\Delta_p} - s_{\Delta_0} &\le (M-m)p\,|\Delta_0| \end{aligned}$$

である（M, m は $f(x)$ の上限と下限).

証明. 補題 3.1 (p.4) でみたもっともシンプルな細分，つまり，区間分割点をひとつ増やすだけの細分を繰り返していくことを考える．p 回繰り返せば，p 個の分割点で細分されたことになるからである.

Δ_0 の小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ を点 c で 2 分割することを考え，その細分された分割を Δ_1 とする．やはり補題 3.1 (p.4) の証明で用いた (3.1) (p.5) の式変形の過程から

$$S_{\Delta_0} - S_{\Delta_1} = (M_i - M_\alpha)(c - x_{i-1}) + (M_i - M_\beta)(x_i - c)$$

である．さてここで

$$\begin{aligned} (M_i - M_\alpha) &\le (M-m) \\ (M_i - M_\beta) &\le (M-m) \end{aligned}$$

という関係が成立していることは M, m の定義からあきらかだから，これを適用すれば

$$\begin{aligned} S_{\Delta_0} - S_{\Delta_1} &= (M_i - M_\alpha)(c - x_{i-1}) + (M_i - M_\beta)(x_i - c) \\ &\le (M-m)(c - x_{i-1}) + (M-m)(x_i - c) \\ &= (M-m)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

である．分割の大きさを示す $|\Delta_0|$ の定義のされ方から $(x_i - x_{i-1}) \le |\Delta_0|$ であるので，結果として

$$S_{\Delta_0} - S_{\Delta_1} \le (M-m)\,|\Delta_0|$$

となる．これを順次 p 回繰り返していくと，

$$\begin{array}{rcl} S_{\Delta_0} - S_{\Delta_1} & \leq & (M-m)\,|\Delta_0| \\ S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2} & \leq & (M-m)\,|\Delta_1| \\ \cdots\cdots & \leq & \cdots\cdots \\ S_{\Delta_{(p-1)}} - S_{\Delta_p} & \leq & (M-m)\left|\Delta_{(p-1)}\right| \end{array}$$

となる．両辺加え合わせれば

$$S_{\Delta_0} - S_{\Delta_p} \ \leq \ (M-m)\sum_{i=0}^{p-1}|\Delta_i|$$

である．さらに，分割の大きさの指標については，分割する前の方が大きいか等しいのだったから

$$|\Delta_0| \geq |\Delta_1| \geq \cdots \geq \left|\Delta_{(p-1)}\right|$$

と並ぶ．それゆえつまるところ

$$S_{\Delta_0} - S_{\Delta_p} \ \leq \ (M-m)\sum_{i=0}^{p-1}|\Delta_i| \ \leq \ (M-m)\sum_{i=0}^{p-1}|\Delta_0| = (M-m)p\,|\Delta_0|$$

となるのである．この結果は，区間分割点が p 個増えたときの S_Δ の減少分の「天井」をあらわしていると読み取ることもできる．

s_Δ の場合も全く同様な手続きで

$$s_{\Delta_p} - s_{\Delta_0} \ \leq \ (M-m)\sum_{i=0}^{p-1}|\Delta_i| \ \leq \ (M-m)\sum_{i=0}^{p-1}|\Delta_0| = p(M-m)\,|\Delta_0|$$

となるのである．区間分割点が p 個増えたときの s_Δ の増加分の「天井」をあらわしている． □

4 Darboux's theorem

ここまでで $\sup_\Delta s_\Delta \leq \inf_\Delta S_\Delta$ (i.e. $s \leq S$) であることが言えた．さて，この分割 Δ はどのくらいあるのだろうか？区間の実数を区切るものであったから，最低でも非加算無限個はあるだろう（天真爛漫に言い切ってしまえば，実数の濃度と同じであると思うが，ま，それはおいておいて）．

そのような非常にたくさん存在する分割ではあるが，ここでは，分割がどんどん小さくなっていくときの特徴を洗い出す．それが以下に述べる Darboux の定理である．そしてこの定理は，次の 5 (p.13) 節で，大いに活躍する定理なのである．

定理 4.1. 【Darboux の定理】 $|\Delta|$ が 0 に収束する任意の分割の列[*10]にたいして，以下が成り立つ：

$$(1)\quad \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = S \qquad (2)\quad \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta = s$$

この定理の意味合いは，$|\Delta|$ が 0 に近づけば近づくほど（分割を細かくしていけば行くほど，ということ．そのときには，小区間 I_i の個数は増え，幅はどんどん小さくなっていく），S_Δ は下限 S に近づいていき，その極限で S に一

[*10] 「分割の列」の意味合いが取りにくいが，こう考えるといいと思う．まず，元となる分割 Δ をひとつ決める．それに細分をくりかえしていった分割の列を $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ とすれば

$$|\Delta| \geq |\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \cdots \geq |\Delta_n| \geq \cdots \geq 0$$

となっていることは $|\Delta|$ の定義と細分の性質からあきらかだ．そしてこの事実を，その振る舞いを推しはかって「$|\Delta| \to 0$ に収束する分割の列」と述べているのである．さらに，元となる分割はなんでもいいので，「任意の分割」と言っているのだった．

致する，ということである．s_Δ についても同様で，上限 s に近づいていき，極限値が s になる．それを物語っているのが上の Darboux の定理．

定理は極限を扱っているので，証明には ε-δ 論法を使うのが良いだろう．定理の内容を ε-δ で書けば，S が下限，s が上限であるので

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ :\ (\forall\Delta\ :\ |\Delta|<\delta\implies S_\Delta-S<\varepsilon)\\
&(2)\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ :\ (\forall\Delta\ :\ |\Delta|<\delta\implies s-s_\Delta<\varepsilon)
\end{aligned}$$

となる．したがって，この論理式の証明ができればいい．

証明． S の方から始める．$S=\inf\limits_{\Delta}S_\Delta$（つまり S は S_Δ の下限）だから

$$0\le S_{\Delta_0}-S<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

となる分割 Δ_0 を用意することができる（存在は保証されていると言って良い）[*11]．この分割 Δ_0 には区間分点が p 個あるとしておく（もちろん p は自然数であればいくつでもいい）．

さて ε-δ 論法は

> かってに導入した ε について，とある δ を使えば，かならずその条件が満たされる．

ということで満足される論法であるから．論理式の条件 $S_\Delta-S<\varepsilon$ をみたす δ が見い出されれば良いことになる．

任意の分割 Δ を用意しよう．そして Δ と Δ_0 の区間分点を合併したものを区間分点とする分割を Δ' とする．当然 Δ' は Δ,Δ_0 の両者の細分になっているから，補題 3.1 (p.4) より

$$S_{\Delta'}\le S_\Delta\qquad\therefore\ 0\le S_\Delta-S_{\Delta'} \tag{4.2}$$

$$S_{\Delta'}\le S_{\Delta_0}\qquad\therefore\ 0\le S_{\Delta_0}-S_{\Delta'} \tag{4.3}$$

となっているはずである．そして，Δ' の区間分点の個数は，Δ_0 の区間分点の個数を p 個としたのだから，Δ に比べて高々 p 個増えているものであるはずである（「高々 p 個」という物言いは，「最大で p 個．それ以下の可能性もある」ということ）．したがって補題 3.3 (p.7) より

$$0\ \le\ S_\Delta-S_{\Delta'}\ \le\ (M-m)p\,|\Delta|$$

となる（M と m はそもそもの大前提の $f(x)$ の上限と下限であることを思い出しておきましょう）．

ここで δ を

$$(M-m)p\delta=\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{i.e.}\quad\delta=\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(M-m)p}$$

となるものとする．はて，このような δ は存在するのか？ M も m も p も ε も固定値（定数）であるから実際に計算できるので，存在すると言って良い[*12]．したがって，任意に選んだ分割 Δ のうちで，$|\Delta|<\delta$ となるものを選択すると

$$\begin{aligned}
0\ \le\ S_\Delta-S_{\Delta'}\ \le\ (M-m)p\,|\Delta|\ \le\ (M-m)p\delta\\
\therefore\ 0\ \le\ S_\Delta-S_{\Delta'}\ \le\ \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

[*11] わざわざ $\varepsilon/2$ するのは，ε-δ 論法での，最終結果を ε で締めくくるための，ある種の美意識に基づく，常套手段である．賛否はあるだろうな．

[*11] 区間分点が「高々 p 個増えている」ときでも補題 3.3 が適用できることを確認しておこう．まず，分割 Δ に対して区間分点が q 個増えた分割を Δ_q とあらわす．ここで q は $q\le p$ という自然数であるとすると，補題 3.3 から $S_\Delta-S_{\Delta_q}\le(M-m)q\,|\Delta|$ となっている．そして $q\le p$ としたのだから，$(M-m)q\,|\Delta|\le(M-m)p\,|\Delta|$ である．「高々 p 個」という事柄は，最大で p 個ということであり，実質 q 個であってもかまわないはずだ．そして，q 個のときの結果は，今見たように，p 個の場合の結果を使って上から押さえつけられる．それゆえ，「高々 p 個」のときでも，p 個の場合の補題 3.3 (p.7) を使って構わないのである．

[*12] こういうときに ε を固定値とみなせるところが ε-δ 論法のご都合主義おっとまちがえた有用なところなのである．

本題の $S_\Delta - S$ を考えよう．(4.1) (p.9) と (4.4) (p.9) ，そして (4.3) (p.9) を並べると

$$\begin{cases} 0 \leq S_{\Delta_0} - S < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leq S_\Delta - S_{\Delta'} < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leq S_{\Delta_0} - S_{\Delta'} \end{cases}$$

であって， 若干トリッキーな式変形であるが,

$$\begin{aligned} S_\Delta - S &= (S_\Delta - S) + (S_{\Delta'} - S_{\Delta'}) + (S_{\Delta_0} - S_{\Delta_0}) \\ &= (S_{\Delta_0} - S) + (S_\Delta - S_{\Delta'}) - (S_{\Delta_0} - S_{\Delta'}) \\ &\leq (S_{\Delta_0} - S) + (S_\Delta - S_{\Delta'}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる．以上まとめると

> どのような ε をとっても，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} \dfrac{1}{(M-m)p}$ である δ を用意すれば．$|\Delta| < \delta$ である分割すべてに対して $S_\Delta - S < \varepsilon$ となる．

s, s_Δ についても理路は同様である（sup になることと，それによる不等号の向きの変化に気をつければ良い）．なので練習問題（ははあ，教科書執筆者が練習問題や演習問題を作りたくなる理由が少しわかった気がする）． □

はてさて．証明はいったん済んだのだが，δ の条件に Δ_0 の区間分点の個数 p が出てくるのが少々気に入らぬ．そのような p に依存して δ が決まってもいいのだろうか，いうところがなんだか気になってしまってしょうがない．

しかしながら，振り返ってみれば，この Δ_0，どんなものを採用してもよかったのである．つまり任意性があったということだ．なので，ある意味，p も任意であると言って良い．とある Δ_0 を選んだことによって決まる p を使って δ をきめることによっても一般性は損なわれないのであろう，とみている．

* *

上記の気がかりを，道標としてきたそれぞれの文献にあたって考えてみる．なお，以下の説明における記号については，可能な限りこの本文で用いたものに置き換えている．

■ 「シェルパ」での Darboux の定理の証明をみてみる．そこでは s を利用して考えていて，まず

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_0} \leq s \qquad \text{i.e.} \quad 0 \leq s - s_{\Delta_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる分割 Δ_0 があることを述べている．さらにこの Δ_0 の区間分点の個数を p としている．

そしてここで，δ を「Δ_0 の小区間の幅の内一番小さいものよりも小さいもの」として定義している．

次に，分割 Δ を，$|\Delta| < \delta$ という制限をつけて導入している．この制限から，Δ の小区間には，Δ_0 の区間分点が高々 1 つしかはいらないことになる．そして Δ_0 と Δ を合併したものを Δ' としている．つまり，$\Delta_0 < \Delta'$ と $\Delta < \Delta'$ という細分関係を用意しているのである．それゆえ

$$s_{\Delta_0} \leq s_{\Delta'}\ , \quad s_\Delta \leq s_{\Delta'}$$

が導出されてくる．そして，あらかじめ本稿の補題 (3.3) (p.7) のようなものは用意せず，Δ の小区間に Δ_0 の区間分点が入る場合と入らない場合を考察し，すでに定めた $|\Delta| < \delta$ を利用して

$$s_{\Delta'} - s_\Delta \leq p(M-m)\delta$$

を得ている．そしてここで

> p は Δ_0 によって固定されているので，δ をさらに $p(M-m)\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるようにとることができる．

とのべ，この δ を使うことにより，$0 \leq s_{\Delta'} - s_\Delta \leq \varepsilon/2$ を得ている．

そして最後に

$$\begin{cases} 0 \leq s - s_{\Delta_0} < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leq s_{\Delta'} - s_\Delta < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \leq s_{\Delta'} - s_{\Delta_0} \end{cases}$$

とまとめて，

$$\begin{aligned} s - s_\Delta &= (s - s_\Delta) + (s_{\Delta'} - s_{\Delta'}) + (s_{\Delta_0} - s_{\Delta_0}) = (s - s_{\Delta_0}) + (s_{\Delta'} - s_\Delta) - (s_{\Delta'} - s_{\Delta_0}) \\ &\leq \ (S - s_{\Delta_0}) + (s_{\Delta'} - s_\Delta) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

としている．

この論法でもやはり，δ は p に依存してあらわされている．さらにこれは想像であるのだが，補題 3.3 (p.7) を用意しないかわりに，

(1) δ を「Δ_0 の小区間の幅の内一番小さいものよりも小さいもの」として定義する．
(2) 次に，分割 Δ を，$|\Delta| < \delta$ という制限をつけて導入する．
(3) 上記の 2 つ制限から，Δ の小区間には，Δ_0 の区間分点が高々 1 つしかはいらないことになる．
(4) 結果 $s_{\Delta'} - s_\Delta \leq p(M-m)\delta$ という計算が実行できる．

という論法でやっているのではないだろうか，とそう思った．その論法の構造はいいとしても，そもそもの δ が上の (1) を満たすという条件も消えてしまっている．この件といい p という個数といい，Δ_0 の属性に基づくものがなんだか有耶無耶になっている気がしてならない．

■ 解析概論 [1, pp.93-94] での Darboux の定理の証明もみてみよう．上記「シェルパ」の場合とほぼ同様である．Δ_0 が D とあらわされている（区間分点の個数も p である）．特徴的なところとして，まず $|\Delta| = \delta$ についての物言いが

> 分割 Δ において δ がすでに十分小で，Δ における各細区間（筆者注：今まで使っていた言葉で言えば小区間）が，D に属する分点を一つよりも多くは含まないと仮定する．（δ を分割 D における細区間の最小幅よりも小さく取れば良い．）

となっているところが挙げられる．これは上の「シェルパ」の例で「高々一つ」といっている事柄の別の言い方であろう．「仮定する」といっているけれども，さきに「δ を分割 D における細区間の最小幅よりも小さく取れば良い」と定義してしまえば同様である．

そしてこの δ について，$s_{\Delta'} - s_\Delta \leq p(M-m)\delta$ を導いた後で

> p も $M-m$ も定数だから，δ を十分小さくすれば $s_{\Delta'} - s_\Delta < \varepsilon$.

と述べている．p に対する依存性が文章からは消えている，p にかかわりなく δ を小さくしていると読めるのであるが，なんだかはぐらかされた気がしている．定数だから十分小さくすれば，というのはわかるのだが，p への依存性はどうなったのだろうか．うーむ．

■ 杉浦著「解析入門 I」 [2, pp.214-216] も，参考にしてみよう．とは思ったものの，この本では最初から n 次元空間での積分が考えられている．なので，筆者なりに $n=1$ とした場合を解釈して書いてみる．まずはじめに $0 \leq s - s_D < \varepsilon/2$ となる固定された分割 D を用意するところは上 2 つと同じである．そのうえ，任意の分割 Δ，Δ と D の合併の分割を Δ' として，細分関係を持ってくるところまでは同じ．

上の 2 つと異なっているのは，δ の扱いである．この本の $d(\Delta)$ は，今まで $|\Delta|$ としてきた量のことであることに注意して，その扱いの部分を引用すると

> $d(\Delta) \to 0$ なる極限を考えるのだから，$d(\Delta)$ が十分小さい Δ のみを考えれば良い．そこで以下 D により生

ずる小区間の辺の長さの最小値を e とし，不等式 $d(\Delta) < e$ をみたす Δ のみを考える．

となっている．みてわかるように，いきなり δ としてを持ってこずに，いったん e という値を経由させているところが異なっている．それに加えて，$d(\Delta) < e$ であれば，Δ の分割は十分に小さいとして検討に値する，ということを言っているように思う．「十分」というところが味噌なんだろうと思う．ここで，e を使ってはいるけれども，Δ のどの区間にも D の区間分点はたかだかひとつであるというところまでは同じである．そして，

> D のみに依存して Δ に依存しない量として D の区間分点の個数 c を選べば（$n = 1$ としたときの筆者の解釈である）

という説明がなされる．ここにきて，「論理展開の種の D（本文や「シェルパ」では Δ_0）にのみ依存して，ターゲットである Δ には依存しない」という言明が出てきたのである．「シェルパ」や「解析概論」でも．「定数である」という説明で匂わせていたのかもしれないし，あるいは，文脈から明らかということで明示的に力説されなかっただけなのかもしれないが，ともかく初めて明言されたのである．そしてここまでで

$$
\begin{aligned}
&(1): \quad d(\Delta) < e \\
&(2): \quad 0 \quad \leq \quad s_{\Delta'} - s_{\Delta} \quad \leq \quad (M-m)c \cdot d(\Delta)
\end{aligned}
$$

という関係が導かれる．この先の展開で特徴的なところは，技巧的であるけれど

$$
0 \quad < \quad \delta \quad < \quad \min\left\{ e,\ \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{(c+1)(M-m+1)} \right\}
$$

というように δ を決めているところにある．そうすれば，$d(\Delta) < \delta$ であるならば (1) は満たされるし，(2) は $0 \leq s_{\Delta'} - s_{\Delta} \leq \varepsilon/2$ となるのである[*13]．やはりここでも，δ が，D の小区間の個数 c に依存していることは変わりはない．D の小区間の幅で最小の値 e については，min の表式から，なんでもいいことが見えるので，その点の気持ち悪さはとりあえず解消した．ただともかく，D にのみ依存していて（あたりまえだな），Δ とは無関係である，ということははっきりと見えてきた．

■　まとめてみる．参考にした上の 3 つの理路すべてにおいて，ε-δ 論法の δ は，種となる分割 Δ_0 や D の小区間の個数とその幅の最小値に依存してあらわされていた．これらの証明を追えば，Δ_0（あるいは D）は分割であればなんでもよかったということがわかる．つまり種とした分割がどんなものであっても，上記の証明はなりたつのである．特定の「種」としての分割が必要なのではなく，なんでもいいからまず種を持ってくればいい．そしてその種とた分割（Δ_0 または D）に応じた「小区間の最小幅」と「区間分点の個数 p」を選べば，定理が証明できるのである，という論理構造になっている．特定の種でないといけないという依存性のあるものではない．むしろ，焦点となっている Δ との無関係性が重要なのだとおもう．手間は増えているが，一般性も任意性も犠牲にしてはいないのである．このように考えれば良いのではあるまいか，と思った．

[*13] テクニカルな変形を説明しておきたい．$\min\{A, B\}$ というのは，A と B の大きくない方を採用するという記号であった．ここで A と B の大小の場合をわけて記号の意味をみてみると

$A > B$ のとき $\min\{A, B\} = B$ だから，$\min\{A, B\} \leq B$ でありかつ $\min\{A, B\} \leq A$
$A < B$ のとき $\min\{A, B\} = A$ だから，$\min\{A, B\} \leq B$ でありかつ $\min\{A, B\} \leq A$
$A = B$ のとき $\min\{A, B\} = A = B$ だから，$\min\{A, B\} \leq B$ でありかつ $\min\{A, B\} \leq A$

となるので，常に $\min\{A, B\} \leq A$ であり，そしてまた $\min\{A, B\} \leq B$ でもあるのである．これを適用し，さらに分母の因子がそれぞれ 1 大きくなっていること（これも技巧である）を使うと

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad s_{\Delta'} - s_{\Delta} \quad &\leq \quad (M-m)c \cdot d(\Delta) \quad < \quad (M-m)c \cdot \delta \quad \leq \quad (M-m)c \cdot \min\left\{ e,\ \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{(c+1)(M-m+1)} \right\} \\
&\leq \quad (M-m)c \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{(c+1)(M-m+1)} \quad \leq \quad \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{c(M-m)}{(c+1)(M-m+1)} \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

となる．

5　有限閉区間での連続関数は積分可能である

「積分概念の定式化」を試み，その定式化から導かれる積分の世界を通して，「有限閉区間の連続関数をは積分可能である」ことを示すのがこの節の目的のひとつである．いまひとつの目的は，Reimann 和と積分の関係を再度見直すことにある．往々にして Reimann 和の収束極限が（定）積分であると言われるが，この見直しを通してその両者の関係を明確化したいと考えている．そしてその過程での Darboux の定理の威力と働きを味わってみる．

最初に断りを入れておくと，ここで述べる積分可能という語は，Reimann 積分可能という事柄をさしている[*14]．

5.1　積分可能かどうかを判定する

積分可能（可積分）という言葉を次のように定義する．関数に「有界」という条件がついていることに留意．

定義 5.1.【積分可能（可積分）の定義】有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数 $f(x)$ において

$$S = s \quad \left(\text{i.e. } \inf_{\Delta\in\mathbb{D}} S_\Delta = \sup_{\Delta\in\mathbb{D}} s_\Delta\right)$$

が成立するとき，積分可能（または可積分）と言う．またこのときの S（そして s も）を

$$S = s =: \int_a^b f(x)\,dx$$

という記号で書く．

Darboux の定理 4.1 (p.8) はこの事柄を主張していないことに重ねて留意である[*15]．

以下，単調関数，一様連続関数，そして連続関数の積分可能性を，この定義を利用して判定し，定理としてまとめてみる．

5.1.1　単調な関数の積分可能性

定理 5.1.【単調関数は積分可能である】$f(x)$ を，有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数であるとする．このとき

$f(x)$ がこの定義域の区間 $[a,b]$ で**単調な関数**であるならば，$f(x)$ はこの区間で積分可能である．

という事柄が成立する．つまり，有界閉区間で単調な関数はすべて積分可能なのである．

この定理においては，関数 $f(x)$ は，有界であってかつ単調でありさえすればよい．関数の連続性は，まだ，必要ない（もちろん連続であっても構わない）．証明においては，積分可能であることを示したいので，$S = s$ を示す方法を考える．

証明. $f(x)$ が単調増加関数である場合を考えることにする．今まで通り，小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ での上限を M_i，下限を m_i とすると，単調増加関数であるのだから，

$$M_i = \sup\{\, f(x) \mid x \in I_i \,\} = f(x_i)\,, \quad m_i = \inf\{\, f(x) \mid x \in I_i \,\} = f(x_{i-1})$$

[*14] Lebesgue（ルベーグ）積分と明確に区別したいときには Reimann 積分と丁寧に言われる．けれども，一般に積分と言われるときは，Reimann 積分をさすことがほとんどのようだ．

[*15] Darboux は $\lim_{\Delta\to 0} S_\Delta = S$ と $\lim_{\Delta\to 0} s_\Delta = s$ の成立は保証していたけれども，$S = s$ については関知していない．

であるはずだ．したがって，

$$S_\Delta = \sum_i M_i\,|I_i| = \sum_i f(x_i)\,|I_i| \;, \quad s_\Delta = \sum_i m_i\,|I_i| = \sum_i f(x_{i-1})\,|I_i|$$

であり，結果

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i|$$

となる．

ここで，$|\Delta| \to 0$ という極限を考える．Darboux の定理から $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = S$, $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} s_\Delta = s$ と S_Δ と s_Δ それぞれの極限の存在は示されているので，左辺の極限は

$$\lim_{|\Delta|\to 0}(S_\Delta - s_\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta - \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta = S - s$$

となる．したがって

$$S - s = \lim_{|\Delta|\to 0}\left\{\sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i|\right\} \;. \tag{5.1}$$

証明の本丸は，積分可能であること，つまり $S = s$ であることを示すことにあるから，右辺が 0 に収束することが言えればいい．右辺にはあらわに $|\Delta|$ が出てきていないので，極限計算を実行するのはむつかしい．よって ε-δ 論法で攻める．すなわち

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ :\ \left(\forall\Delta\ :\ |\Delta| < \delta \implies \sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i| < \varepsilon\right) \tag{5.2}$$

を示すことが主眼になる．

$\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$ という δ を選び，分割 Δ を $|\Delta| < \delta$ となるような分割とする．すると

$$|\Delta| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \qquad \text{i.e.} \quad \max_i(x_i - x_{i-1}) \quad < \quad \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

となる．さらに $|I_i| \le \max\limits_i(x_i - x_{i-1})$ なのだから

$$\sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i| \quad \le \quad \sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\max_i(x_i - x_{i-1}) \quad < \quad \sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \;.$$

最右辺は

$$\sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\Big(f(b) - f(a)\Big) = \varepsilon$$

となるから，

$$\sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i| \quad < \quad \varepsilon$$

である．以上を ε-δ 的にまとめると

> どんな ε についても $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$ となる δ を用意すれば，
> $|\Delta| < \delta$ となるすべての分割 Δ にたいして $\sum\limits_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i| < \varepsilon$ である．

となって．論理式 (5.2) (p.14) が成立することが証明できた．

以上から，

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\left\{\sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1})\Big)\,|I_i|\right\} = 0$$

となって，再び (5.1) (p.14) に目をやれば

$$S - s = \lim_{|\Delta|\to 0} \left\{ \sum_i \Big(f(x_i) - f(x_{i-1}) \Big) |I_i| \right\} = 0 \quad \therefore \;\; S = s\ .$$

つまり，単調増加関数 $f(x)$ は積分可能であることが示されたのである．

単調減少関数の場合も，理路は全く同様である（M_i と m_i が入れ替わることが主である）．なので練習問題， □

5.1.2 一様連続関数の積分可能性

定理 5.2. 【一様連続関数は積分可能である】$f(x)$ を，有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数であるとする．このとき

$f(x)$ がこの定義域の区間 $[a,b]$ で**一様連続な関数**であるならば，$f(x)$ はこの区間で積分可能である．

という事柄が成立する．

連続関数を考えるひとつ手前で，一様連続な関数は積分可能であることを見ておく．

証明． 本題の証明に入る前に一様連続とはどういうことか，その定義を見ておこう．

【一様連続の定義】関数 $g(x)$ が区間 I で定義されていて，この区間 I で一様連続であるという事柄は，ε-δ 論理式で

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ :\ (\forall x_1,\, x_2 \in I\ :\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon) \tag{5.3}$$

とあらわされる[a]（連続[*16]の定義との違いに要注意である）．

[a] $\forall x_1,\, x_2 \in I$ は，$\forall x_1 \in I,\ \forall x_2 \in I$ の略記である．

定理の証明に入ろう．区間 $I = [a,b]$ で定義されている有界で一様連続な関数を $f(x)$ とする．Δ を I の任意の分割とし，この Δ によって I は小区間 $I_i = [x_{i_1}, x_i]$ の集まりに分割されるものとする．

さて $f(x)$ は区間 I で一様連続であるのだから，当然小区間 I_i でも一様連続である．したがって I_i においては $f(x)$ の上限 M_i と下限 m_i は必ず存在する（**実数の公理**）．その各々を与える変数を $u_i,\, v_i$ とする（当然 $u_i,\, v_i \in I_i$）．すなわち

$$M_i = f(u_i)\ , \quad m_i = f(v_i)\ .$$

これらをもとにすれば，S_Δ と s_Δ は

$$S_\Delta = \sum_i M_i\, |I_i| = \sum_i f(u_i)\, |I_i|\ , \quad s_\Delta = \sum_i m_i\, |I_i| = \sum_i f(v_i)\, |I_i|$$

となる．したがって，

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_i \Big(f(u_i) - f(v_i) \Big) |I_i|$$

であり，$|\Delta| \to 0$ の極限を考えると

$$\lim_{|\Delta|\to 0} (S_\Delta - s_\Delta) = \lim_{|\Delta|\to 0} \left\{ \sum_i \Big(f(u_i) - f(v_i) \Big) |I_i| \right\}\ ,$$

[*16] 念のために．関数が a で連続であるということは（定義域を I として）

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ :\ (\forall x \in I\ :\ |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

である．一様連続との違いに要注意である．違ってはいるけれども，一様連続ならば連続であることはあきらか．その逆は成立しない．

これに Darboux の定理を使って

$$S - s = \lim_{|\Delta|\to 0} \left\{ \sum_i \Big(f(u_i) - f(v_i) \Big) |I_i| \right\} \tag{5.4}$$

となる[*17].

(— ここからの理路は，前節の「単調関数の積分可能性」とほぼ同様である．—)

さてさて，$S = s$ であれば積分可能なのであった．したがって，この右辺が 0 に収束することが示せれば，積分可能ということになる．この事柄を ε-δ 論法の論理式であらわすと

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \left(\forall \Delta\ :\ |\Delta| < \delta \implies \sum_i \Big(f(u_i) - f(v_i) \Big) |I_i| < \varepsilon \right) \tag{5.5}$$

であるから，上記を示すことがここからの主眼になる．

ここで，ε-δ 論法のちょいとした技術を使う．一様連続であれば論理式 (5.3) (p.15) が成り立つのであった．この論理式は「任意の ε について」成立するということを主張しているのだから，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ \left(\forall x_1,\, x_2 \in I\ :\ |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \tag{5.6}$$

というように書きあらわしても問題はないはずだ（気に入らないのなら $\varepsilon' = \varepsilon/(b-a)$ として，任意の ε' について考えればいい）．そして，そのような δ は必ず存在する，というのが一様連続の主張である．したがって，ここからはその具体的な実体はわからないままであるけれども，上記 (5.6) (p.16) の一様連続性を成り立たせる δ を「てこ」にしていくことにする．

さて，分割 Δ が，「てこ」である δ を用いて，$|\Delta| < \delta$ を満たす分割であるとしよう．$|\Delta| = \max_i |I_i|$ であったから，当然 $|I_i| < \delta\ (i = 1, 2, \ldots)$ である．その上，$u_i,\, v_i \in I_i$ であるから

$$|u_i - v_i| \ \leq\ |I_i| \ <\ \delta\,.$$

さらにまた絶対値の性質から

$$f(u_i) - f(v_i) \ \leq\ |f(u_i) - f(v_i)|\ .$$

そしていま，論理式 (5.6) (p.16) を満たす δ と u_i, v_i を使っているのだから

$$f(u_i) - f(v_i) \ \leq\ |f(u_i) - f(v_i)| \ <\ \frac{\varepsilon}{b-a}$$

である．したがって，

$$\sum_i \Big(f(u_i) - f(v_i) \Big) |I_i| \ \leq\ \sum_i |f(u_i) - f(v_i)|\, |I_i| \ <\ \sum_i \frac{\varepsilon}{b-a} |I_i| = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i |I_i| = \varepsilon$$

となる．つまり，この δ を使えば，めでたく論理式 (5.5) (p.16) が満たされていることが示されたのだ．(5.4) (p.16) にもどれば

$$S - s = \lim_{|\Delta|\to 0} \left\{ \sum_i \Big(f(u_i) - f(v_i) \Big) |I_i| \right\} = 0 \quad \therefore\ \ S = s$$

つまり，一様連続関数 $f(x)$ は積分可能であることが示されたのである．　□

[*17] なんども出てくるくどい注釈だけど，$\lim S_\Delta$ と $\lim s_\Delta$ が存在するからこの計算が可能になるのである．そして Darboux の定理がその存在を保証している．

5.1.3 連続関数の積分可能性

定理 5.3. 【連続関数は積分可能である】$f(x)$ を，有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数であるとする．このとき

$f(x)$ がこの定義域の区間 $[a,b]$ で**連続な関数**であるならば，$f(x)$ はこの区間で積分可能である．

という事柄が成立する．つまり，有界閉区間で連続な関数はすべて積分可能なのである．

いよいよ連続関数である．

証明. 連続関数は，有界閉区間においては必ず一様連続である，ということが，定理としてよく知られている．これは，文字通り「有界閉区間」が対象となるのであって，それ以外の場合（例えば開区間とか，非有界とか）については必ずしもそういうとはいえない，ということは諒解しておくべきである[*18]．ともかく，最も大事なところは，はじめの「有界閉区間での連続関数は一様連続である」というところにある．なおこの定理，それなりに証明は面倒なので割愛させていただいて，ここでは数学的事実として受け入れてしまうことにする[*19]．

さて，この事実を受け入れてしまえば，定理 5.2 (p.15) から，有界閉区間での連続関数は（一様連続なのだから）積分可能である，ということになる．証明はこれで終わりだ． □

以上で，「有界閉区間での連続関数は積分可能である」ことが証明できたのだけれど，この証明は，見てきたように，定理 5.2 (p.15) に多くを追っている．そして定理 5.2 (p.15) の証明を振り返ってみると，Darboux の定理の利用に加えて，一様連続の性質を同時に使うことにより，$S = s$ つまり積分可能であることが示されている．一様連続という概念とその定義がなかったら，証明は不可能．Darboux の定理だけでは辿り着けないのである．本稿の冒頭の能書で，森毅が「あの Reimann でさえもが，有限閉区間上の連続関数が Reimann 可積分であることの証明はできなかったらしいと言っている」と書いたが，正確には

> 「それはそのはずで，19 世紀の最大の数学者リーマンですら，これ（筆者注：“コンパクト直方体の上での連続関数はリーマン積分可能である” という定理）を証明したわけではない．もっとも，それは一様連続の概念がなかったからで，ハイネが一様連続性の概念を導入するとすぐに，ダルブーがこれを証明した」

と，現代の古典解析 [4, p.151] で言っている．なるほど，そういう歴史の流れであったのか．

5.2 Reimann 和の収束からはじめる

Reimann 和というものを定義する．頭の中で色々と錯綜している部分もある Reimann 和であるけれど，この定義に則ってあらためてとらえなおす．

定義 5.2. 【Reimann 和の定義】$f(x)$ を，有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数とする．そして，$[a,b]$ の任意の分割を Δ とする．この Δ の各小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ から任意の ξ_i をとって

$$\sum\nolimits_\Delta := \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| \,\left(= \sum_i \{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\}\right)$$

と定められる量を Reimann 和と呼ぶ．

この Reimann 和の収束と，積分可能という事柄が，お互い必要十分条件になっていることをこれから見ていこう．

[*18] ここに「コンパクト」という概念を使っての説明が入ると格好がいいのだけれど，いまだあんまりよくわかっていないので，見え張った格好がつけられない．いつかきちんと理解したいんだよね「コンパクト」．

[*19] 田島 [3] では，証明に背理法が用いられている（pp.107-108）．杉浦 [2] では，「コンパクト（出た）」な場合についての背理法が書いてある（p.226 定理 4.1）．高木著解析概論 [1, p.28] では，背理法を用いずに証明されている．

5.2.1 Reimann 和の収束

補題 5.1. 【Reimann 和の収束】$f(x)$ を，有界閉区間 $[a, b]$ を定義域とする有界な関数とする．そして，$[a, b]$ の任意の分割を Δ とし，Δ の各小区間を $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ とする．このとき

$$f(x) \text{ が積分可能である（}S = s\text{）} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = S = s = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．積分可能であれば Reimann 和は S に収束する，という補題である[*20]．

補題の記述からあきらかなように，関数 $f(x)$ が有界でさえあればこの補題は成り立つのである．関数の連続性は要求されていない．

証明. 今まで通り，小区間 I_i での上限を M_i，下限を m_i とする．そして，ξ_i は，定義 5.2 (p.17) に書いた通りのもので，$\xi_i \in I_i$ となる任意の点である．したがって，当然のことであるが，

$$m_i \quad \le \quad f(\xi_i) \quad \le \quad M_i$$

となっている．それゆえ

$$m_i\,|I_i| \quad \le \quad f(\xi_i)\,|I_i| \quad \le \quad M_i\,|I_i|$$

である．i で和をとることにより

$$\sum_i m_i\,|I_i| \quad \le \quad \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| \quad \le \quad \sum_i M_i\,|I_i| \qquad \text{i.e.} \quad s_\Delta \quad \le \quad \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| \quad \le \quad S_\Delta$$

が得られる．以下，記述の簡単化のために，$\sum_\Delta = \sum_i f(\xi_i)\,|I_i|$ に置き換える．$|\Delta| \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta \quad \le \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta \quad \le \quad \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta$$

になる．ここに Darboux の定理 4.1 (p.8) を適用すれば

$$s \quad \le \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta \quad \le \quad S\ .$$

そしてそもそもの仮定条件として，この $f(x)$ は積分可能であるとしたのだから，$S = s$ としてよい．したがって挟み撃ち論法を利用して

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = S\ .$$

さいごに，S の表記をあらためれば

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

□

5.2.2 Reimann 和の収束から導かれること

上の証明の過程で

$$s_\Delta \quad \le \quad \sum\nolimits_\Delta \quad \le \quad S_\Delta\ , \qquad s \quad \le \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta \quad \le \quad S$$

[*20] この段階では，積分可能であること（$S = s$）が十分条件になっていることに注意．次の 5.2.2 (p.18) 節で，積分可能（$S = s$）という条件は，Reimann 和の収束のための必要条件にもなっていることを示す．結論を先取りすれば，必要十分条件になっているのである（定理 5.4 (p.20) 参照）．

であることが見て取れた．そして，この不等式は，積分可能性の条件 ($S = s$) を使わずに導かれた．つまり，Reimann 和の極限 $\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{\Delta}$ については，関数 $f(x)$ が有界であれば，つねにこの関係が成り立つのである．

そこから一歩進んで，かりにこの Reimann 和の極限が収束しているとどうなるのか（その収束極限値を R としておこう)，というふうに問題を設定してみる．なお，$f(x)$ は有界閉区間 I で定義されていることは当然の前提としている．

- $f(x)$ が連続関数であるとき

  小区間 I_i で，$f(\xi_i) = M_i$ となる ξ_i を採用した Reimann 和を $\sum'_{\Delta}$ とすると，$\sum'_{\Delta} = \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| = S_{\Delta}$ である．したがって，$|\Delta| \to 0$ の極限をとって Darboux の定理を援用すれば

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum\nolimits'_{\Delta} = \lim_{|\Delta|\to 0} S_{\Delta} = S\ .$$

  同様にして，I_i で，$f(\xi_i) = m_i$ となる ξ_i を採用した Reimann 和を $\sum''_{\Delta}$ とすると，$\sum''_{\Delta} = \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| = s_{\Delta}$ であるから

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum\nolimits''_{\Delta} = \lim_{|\Delta|\to 0} s_{\Delta} = s\ .$$

  さて Reimann 和の極限が R に収束すると仮定しておいたのだから，$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum'_{\Delta} = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum''_{\Delta} = R$ であるはず．それゆえ

$$\left.\begin{array}{l} R = S \\ R = s \end{array}\right\} \quad \therefore\ S = s$$

  となる．つまり，Reimann 和の極限が収束しているときには，連続関数 $f(x)$ は積分可能なのである．

- $f(x)$ の有界性だけを要請するとき

  上の例は，ま，手始めであるから，「連続関数であるとき」というかなり強めの条件を課していた．今度はより一般化して，「有界な関数」である場合について調べてみよう．理路はほぼ同様である．

  $f(x)$ が有界であるとしたのだから，小区間 I_i でも有界であることは間違いない．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，各小区間 I_i において

$$M_i - \varepsilon \le f(\xi_i) \le M_i$$

  となる ξ_i が存在する．この ξ_i を使った Reimann 和を

$$\sum\nolimits'_{\Delta} = \sum_i f(\xi_i)\,|I_i|$$

  と書くことにする．いっぽうで，$M_i - \varepsilon \le f(\xi_i) \le M_i$ なのであるから

$$(M_i - \varepsilon)\,|I_i| \ \le\ f(\xi_i)\,|I_i| \ \le\ M_i\,|I_i|$$

  であり，i で和をとると

$$\sum_i (M_i - \varepsilon)\,|I_i| \ \le\ \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| \ \le\ \sum_i M_i\,|I_i|$$

$$\therefore\ S_{\Delta} - (b-a)\varepsilon \ \le\ \sum\nolimits'_{\Delta} \ \le\ S_{\Delta}\ .$$

  $|\Delta| \to 0$ として Darboux の定理を用いると

$$S - (b-a)\varepsilon \ \le\ \lim_{|\Delta|\to 0}\sum\nolimits'_{\Delta} \ \le\ S\ .$$

  ε は正の数であればなんでもよいので，十分小さい ε でも上記は成立する．したがって，$\varepsilon \to 0$ の極限をとっても成立するので

$$S \ \le\ \lim_{|\Delta|\to 0}\sum\nolimits'_{\Delta} \ \le\ S \quad \therefore\ \lim_{|\Delta|\to 0}\sum\nolimits'_{\Delta} = S\ .$$

こんどは，ほぼ同様なことを m_i に対して行う．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，各小区間 I_i において

$$m_i \le f(\xi_i) \le m_i + \varepsilon$$

となる ξ_i が存在するから，この ξ_i を使った Reimann 和を

$$\sum\nolimits''_\Delta = \sum_i f(\xi_i)\,|I_i|$$

と書く．$m_i \le f(\xi_i) \le m_i + \varepsilon$ なのであるから

$$\begin{aligned} m_i\,|I_i| \quad &\le \quad f(\xi_i)\,|I_i| \quad \le \quad (m_i+\varepsilon)\,|I_i| \\ \therefore\ \sum_i m_i\,|I_i| \quad &\le \quad \sum_i f(\xi_i)\,|I_i| \quad \le \quad \sum_i (m_i+\varepsilon)\,|I_i| \\ \therefore\ s_\Delta \quad &\le \quad \sum\nolimits''_\Delta \quad \le \quad s_\Delta + (b-a)\varepsilon\ . \end{aligned}$$

$|\Delta| \to 0$ として Darboux の定理を用いると

$$s \quad \le \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits''_\Delta \quad \le \quad s + (b-a)\varepsilon\ .$$

$\varepsilon \to 0$ の極限をとれば

$$s \quad \le \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits''_\Delta \quad \le \quad s \qquad \therefore\ \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits''_\Delta = s\ .$$

さて Reimann 和の極限が R に収束すると仮定しておいたのだから，2つの極限は等しくて

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits'_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits''_\Delta = R$$

である．したがって

$$S = R = s \qquad \therefore\ S = s$$

となる．つまり，Reimann 和の極限が収束しているときには，有界な関数 $f(x)$ は積分可能ということが言えるのである．先に見た連続関数についての問いは，これの特殊な場合なのであった．なぜなら，有界閉区間で連続である関数ならば，それは有界な関数だからである．

以上の結果を，補題としてまとめると

補題 5.2. $f(x)$ を，有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数とする．そして，$[a,b]$ の任意の分割を Δ とし，Δ の各小区間を $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots)$ とする．このとき

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = R\ \text{（Reimann 和が } R \text{ に収束する）} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ が積分可能であり，} R = S = s \text{ である}$$

が成り立つ．Reimann 和の極限が収束するのならば，積分可能という補題である．

そして，補題 5.1 (p.18) と補題 5.2 (p.20) とを見比べると，お互いが十分条件になっている（または，必要条件になっている）．したがって，定理として次のようにまとめられる：

定理 5.4. 【積分可能性と Reimann 和の収束】$f(x)$ を，有界閉区間 $[a,b]$ を定義域とする有界な関数とする．そして，$[a,b]$ の任意の分割を Δ とし，Δ の各小区間を $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots)$ とする．このとき

$$f(x) \text{ が積分可能である } \left(S = s =: \int_a^b f(x)\,dx \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = S = s =: \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．

このように Reimann 和の極限と積分可能性が互いに必要十分条件であるということを示せたことは，おおきいと思う．この結果があるから，高校の教室でのあのような「上からと下からで面積を挟む（いまいち正確ではないな）」定積分の説明に理論的背景が与えられているのだろうと思う．

6　クロージング

あらためて，考察してきた条件と記号とを，今までの流れに沿って簡単に整理しておこう．

■ 対象とする関数の条件

対象とする関数 $f(x)$ は以下の条件の門を潜り抜けられる必要がある：

(1) $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義されている．

(2) $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a, b]$ で有界である．

■ Darboux の定理まで

条件の門を潜った関数 $f(x)$ については，かならずその有界閉区間 I において上限と下限が存在する．その上限を M，下限を m とあらわした．すなわち

$$M = \sup \{ f(x) \mid x \in I \} \quad \text{（上限）},$$
$$m = \inf \{ f(x) \mid x \in I \} \quad \text{（下限）}.$$

ついで，区間の分割 Δ というものを考えた．区間の分割方法はそれこそ無限にあるので，$\mathbb{D}$ を $I = [a, b]$ の分割全体をあらわす集合とした．もちろん $\Delta \in \mathbb{D}$ である．Δ によって分割されたおのおのの区間を小区間と呼ぶことにし，この小区間を I_i $(i = 1, 2, \ldots)$ とあらわした．もちろん $\bigcup_i I_i = I$ である．さらに，小区間おのおのでの上限を M_i，下限を m_i とあらわした．すなわち

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in I_i \} \quad \text{（上限）},$$
$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in I_i \} \quad \text{（下限）}.$$

これらの準備の上で，各小区間において

$$(S_\Delta)_{I_i} = M_i \, |I_i|$$
$$(s_\Delta)_{I_i} = m_i \, |I_i|$$

という量を定義し，区間全体の量として

$$S_\Delta = \sum_i (S_\Delta)_{I_i} = \sum_i M_i \, |I_i|$$
$$s_\Delta = \sum_i (s_\Delta)_{I_i} = \sum_i m_i \, |I_i|$$

を作成し定義した．この 2 つはどちらも有界であるから，その上下限のうち，S_Δ の下限を S, s_Δ の上限を s と記すようにした．すなわち

$$S = \inf_{\Delta \in \mathbb{D}} S_\Delta \, , \quad s = \sup_{\Delta \in \mathbb{D}} s_\Delta \, . \tag{6.1}$$

次に細分という操作を施すとどうなるかを調べた．分割 Δ の細分とは，Δ の区間分点を保存しながらその他の区間分点を追加していき．より細かくする操作である．分割 Δ の細かさの指標は

$$|\Delta| = \max_i |I_i| \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

であらわすことにしたので，Δ の細分を Δ' $(\in \mathbb{D})$ とすれば

$$|\Delta'| < |\Delta|$$

となることはあきらかである（細分関係は $\Delta < \Delta'$ とあらわされることに注意）．

この細分の操作を利用して，細分の極限すなわち分割 Δ を細かくする極限 $|\Delta| \to 0$ においては，S_Δ は下限 S に，s_Δ は上限 s に収束することがわかった．これが Darboux の定理である（(6.1) (p.21) との違いに注意）：

$$【\text{Darboux の定理}】\qquad \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta = \inf_{\Delta\in\mathbb{D}} S_\Delta = S\,, \quad \lim_{|\Delta|\to 0} s_\Delta = \sup_{\Delta\in\mathbb{D}} s_\Delta = s\,.$$

Darboux の定理は，$S = s$ は主張していない．

■ 積分可能（可積分）ということの定義

以上をもとにして，積分の世界が次のように構築されたのであった：

(1) $S = s$ となっているとき，$f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で積分可能であると定義した．
そして，積分可能であるときには，その積分値は $S(=s)$ で，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = S(=s)$ と書けると約束した．
(2) $f(x)$ が単調な関数（単調増加，または，単調減少）であるときは，$S = s$ となる．つまり積分可能である．
(3) $f(x)$ が一様連続な関数であるときは，$S = s$ となり，積分可能である．
上記 (2), (3) の 2 つは，Darboux の定理を用いて導出された．
(4) $f(x)$ が連続な関数であるときは積分可能である．
「有界閉区間で連続な関数は，その有界閉区間で一様連続である」という定理を使って示された．つまり，この場合には，Darboux の定理に加えて，一様連続であるということが必要なのであった．

冒頭のイントロダクションで書いた

【定理】有界閉区間 I で定義された関数の集まり（関数族）を考える．その中の任意の関数 $f(x)$ について，

$$f(x) \text{ は有界閉区間 } I \text{ で連続である} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ は積分可能である}\,.$$

（ただし，この逆（つまり $\Longleftarrow$ 方向）は成り立たない．要注意）

と言う定理を再度味わうと，$\Longrightarrow$ はきちんと書けば

$$\begin{aligned} f(x) \text{ は有界閉区間 } I \text{ で連続である} &\implies f(x) \text{ は有界閉区間 } I \text{ で一様連続である} \\ &\implies S = s \text{ となることが，Darboux の定理を経由して示される} \\ &\implies \text{積分可能なので，その積分を } \int_a^b f(x)\,dx \text{ と表記する} \end{aligned}$$

ということになる．間に Darboux の定理の使用が挟まれているのだ．また，(2),(3) から有界な関数も（単調関数も）積分可能であり，その際には必ずしも連続である必要はないことがわかる．したがって，$\Longleftarrow$ が成り立たない理由も，あきらかだろう．積分可能であると言っても，連続関数であるとは限らないのだ[*21]．

■ Reimann 和の導入（定義）

また一方で，Reimann 和という量を定義した（ξ_i は小区間 I_i の中の任意の点）：

$$\text{Reimann 和：}\quad \textstyle\sum_\Delta := \displaystyle\sum_i f(\xi_i)\,|I_i|\ .$$

[*21] 例えば，不連続であっても，有界であればいいのである．付け加えれば，積分可能になるためには，不連続な箇所は有限個でなくてはいけない．それゆえ例の「ディリクレ関数（x が有理数なら 1, 無理数なら 0 という関数）」は，いたる所で不連続なので積分不可能なのである（Lebesgue 積分はできるらしい）．

この数式表現からわかるように，Reimann 和は，分割 Δ の小区間 I_i の幅 $|I_i|$ と，その小区間内の関数値 $f(\xi_i)$ を使ってあらわされる．ξ_i については特別な条件はない．I_i の中の点であればどれでもよいのである．

そしてまた，Reimann 和 $\sum_\Delta$ には，

$$s_\Delta \;\leq\; \sum\nolimits_\Delta \;\leq\; S_\Delta$$

という性質があることが導き出せた．さらに $|\Delta| \to 0$ という極限をとると

$$s \;\leq\; \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta \;\leq\; S \tag{6.2}$$

と言う性質があることも導き出せたのであった．なお，極限をとった最後の結果の導出には Darboux の定理を利用している．

■ 積分と Reimann 和の極限の関係

(a) $S = s$ のときには，Reimann 和の極限は S に（同じことだが s に）収束する．これはもう，(6.2) (p.23) からあきらかである（挟み撃ちされるので）．ここからわかることは，Reimenn 和の極限が収束することであり，かつ，その収束値が積分の値と等しいということである．したがって，

$$S = s \quad\Longrightarrow\quad \lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = \int_a^b f(x)\,dx = S(=s)\;.$$

とあらわせることになる．

(b) (a) とは逆に，有界関数（連続でなくても良い）$f(x)$ の Reimann 和の極限が収束するならば，その収束値は S に等しく，また s にも等しいことが導出できた．さらに収束値は一意であるべきなので，この結果から $S = s$ であることが言える．まとめると，Reimann 和の極限の収束値は

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = S = s$$

となっていて，積分可能であることがわかるのである．したがって

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum\nolimits_\Delta = \int_a^b f(x)\,dx \quad (= S = s)$$

というように表記することができるのである．

この関係の導出の理路はそのほとんどを (6.2) (p.23) におっていて，その式の導出には Darboux の定理が必要なのであった．このようにして Reimann 和と Darboux の定理が結びついているのである．

以上で Darboux の定理をめぐっての旅程は終了である．お疲れ様でした．道中では，あたりまえのことがらをクドクドと書いた部分もあったかも知れない．でもまあそれもよしとして，筆者から筆者自身へのご褒美として，この言葉の引用で締めくくる：

— どれほど自明な物事も一度は言及されねばならない[*22]

[*22] Higgs にまつわる文献 [5, p.137] から引用．

Contents

参考文献

[1] 高木 貞治. 『解析概論』. 岩波書店, 改訂第三版, 1961. （第 19 刷（1977）を参照した）.

[2] 杉浦 光夫. 『解析入門 I』. 東京大学出版会, 1980. （第 38 刷（2022）を参照した）.

[3] 田島 一郎. 『イプシロン–デルタ』. 共立出版株式会社, 1978. （第 59 刷（2018）を参照した）.

[4] 森 毅. 『現代の古典解析』. 日本評論社, 第 1 版, 1985. （第 2 刷（1995）を参照した）.

[5] フランク・クローズ（松井信彦訳）. 『宇宙に質量を与えた男　ピーター・ヒッグス』. 株式会社 早川書房, 2023.