原始関数と不定積分

久島広幸 (h2@hisasima.jp)

2023/12/3

概要

普段の生活では，原始関数と不定積分には区別はなく，ただの言い換えであると見立てていてもそれほど問題はない．でも，それであるなら，なぜ異なる２つの用語が存在しているのか？きっと何かあるのだろうと勘繰って，そこら辺を少し探ってみた．諒解できたことは，原始関数は微分の世界のみで構築でき，不定積分は積分の世界のみで（定積分を経由して）構築できるということである．そして，関数の連続性を仲立ちにすれば，お互いがお互いに貢献できるということであった．その貢献を定理の形で見事に表現したものが，**微分積分学の基本定理**なのである．以下，原始関数と不定積分の構築を明示したのちに，微分積分学の基本定理を味わうことを目標とする．

原始関数と不定積分という２つの用語

原始関数と不定積分をことさらに区別しなくても実用上ほとんど問題はないのだけれども，現実にはこのように２つの用語が存在している．どうもその理由には，用語を通してそれらの生い立ちの違いを確認できるようにしよう，という意図が隠れているようだ．ま，その「隠れた意図」はともかくとして，原始関数と不定積分は定義が違う．両者に共通しているところは，まずはじめに $f(x)$ ありきであるところだけである．そのうえで

原始関数　$F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ のこと．

不定積分　$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ となる $F(x)$ のこと．

という定義で，用語が定められている．この定義に，生い立ちの違いが込められているのだろうと思う．

これから本稿を通じて見ていくことになるけれども，先回りして言えば，まず原始関数の場合には，微分が利用できる世界が構築されている必要があり，その世界の中で完結，つまり微分の概念だけで導入されるものである．一方で，不定積分の場合には，定積分をもちいて定義されていることから，先に定積分というものが定まっている世界が必要であり，その定積分をもとにして，不定積分が導入されるという筋道になる．まとめてみると

原始関数　微分ありき．微分のみで構築できる（定積分は不要）．

不定積分　定積分ありき．定積分のみで構築できる（微分は不要）．

ということになろうか．

以下，関数 $f(x)$ をもとに考えていくので，この $f(x)$ の定義域を $\mathbb{I}$ であらわすことにしておこう．定義域があってはじめて関数なのだ（と誰かが言っていた）．

原始関数の性質

$F'(x) = f(x)$ となる F のことを原始関数と名づけることは上に述べた．定義である．さてこの原始関数については，次の性質があることが知られている：

(1) 原始関数は微分可能でなければならない（それゆえ連続でもなければならない）．

(2) 原始関数が存在するならばそれは無数にある．

(3) 異なる原始関数どうしの差[*1]は定数である．

(4) 関数 $f(x)$ が連続関数ならば，かならず原始関数が存在する．

性質 (1) は定義からあきらかである．というよりは，原始関数の定義がこれを要請している，と言ったほうがよいだろう．

性質 (2) と (3) に進む前に，微分の世界では

【定理】関数を F 微分した結果（つまり導関数）が 0 である． $\Longleftrightarrow$ 関数 F は定数である．

という定理があることを明記しておこう．この事実にまつわる詳細は．“補遺 1 (p.10) ” にまとめてあるが，一言付け加えておくと，ロルの定理やら微分の平均値の定理やらを使って証明されてはいるものの，微分の世界のみで完結していて，積分概念の力は借りていないということである．この点は留意しておきたい．

さて性質 (2) についてである．$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ としよう．そして C をただの数すなわち定数をあらわすものとすると

$$(F(x)+C)' = (F(x))' + C' = F'(x) = f(x)$$

であるから，$F(x)+C$ も原始関数の定義から原始関数であることになる．そして C は定数であればなんでもいいので無数に存在する．よって (2) が成り立つことがいえる．

性質 (3) については，$F(x)$ と $G(x)$ ともに原始関数であるとすると

$$(F(x)-G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
$$\therefore\ F(x) - G(x) = C \quad (C \text{ は定数})$$

と計算できて，(3) が示される．つまり，異なる原始関数が存在するのだとしたら，それは定数 C の差があるのみなのだ．したがって，(2) と合わせると，$F(x)$ が原始関数であるならば，すべての原始関数は $F(x)+C$ という形であらわされるのである．逆方面から言えば，定数項を除けば，原始関数はひとつ，ユニークに定まるのである．

(4) については，残念ながら，後に述べる “微分積分学の基本定理” の威力を借りねば導出ができない．つまり，微分の世界だけでは導けない性質なのだ．のちにその意味合いを見定めるけれども，とりあえずここではこの性質の導出を一旦据え置いておく．ただこの性質においてはじめて，$f(x)$ に対して，「連続である」という条件が課せられたことは特筆すべきである．

不定積分の導入

□ 定積分の性質

有界閉区間[*2] $\mathbb{I} = [a, b]$ で定義された有界な関数がその区間で積分可能かどうか，という概念と理論は，Darboux の定理を中心に展開される．そして積分可能なときに，定積分と称して $\int_a^b f(x)\,dx$ のようにあらわすのである[*3]．こ

[*1] 無造作に「関数どうしの差」と言い，後に $F(x) - G(x)$ という計算をしているが，関数の差というのはどういうものなのか？その意味合いはきちんと把握しておくべきだろう．まずこのように関数どうしで演算を行うのであるから，関数 F と G の定義域は同じでなくてなるまい．同一の領域で関数が定義されていないと演算は無意味だ．そしてここから大事なのは，「差」について何を注目点にするかである．

例えば定義域における各々の関数の最大値を使って比較し差を定義する，というのも一つの考え方だと思う．$F - G = \max F(x) - \max G(x)$ とでも書くかもしれない．

そして通常は，上の考え方とは別の，次の考え方からなるものを採用する．まず定義域の要素からひとつを取り出して（それを a とする），各々の関数に適用して差をとったものを（すなわち $F(a) - G(a)$ を），その定義域の要素 a での関数の差と考えることにする．なので，一般的に $a \neq b$ であるときには $F(a) - G(a) \neq F(b) - G(b)$ である．$F(a) - G(b)$ というものは，この考え方の場合には，意味を持たない．このように決めた「関数の差」の上で，上の (2) は，定義域のすべての要素 x それぞれについて $F(x) - G(x)$ は値が等しい（すなわち定数）ということを述べているのである．定義域の要素，というより定義域の「点」と言った方がグラフから受けるイメージに近いかもしれないけれど，ここでは定義域を集合と捉えて，あえて要素と言ってみた．深い意味はあまりない．

[*2] 閉区間であるならば有界であると考えてはいけないのだろうか？有界ではない閉区間が存在するのだろうか？という疑問はしごく自然であると思う．そして数学には $(-\infty, \infty)$ や $[a, \infty)$ なども閉区間とする「位相論，位相空間論」というものがあるらしい．なので，安全のために，有界という形容詞を付けておくようである．

[*3] Darboux の定理と積分と（あわせて Reimann 和について）の学習結果を，『Darboux の定理による積分世界の構築』 [1] にまとめてみました．ご一読くだされば幸いです．なおちなみに，Darboux の定理からの積分世界構築には，微分の理論や定理はいっさい必要がないことを強調しておきます．

の積分の世界には

> 【定理】有界閉区間 $\mathbb{I}$ で定義された関数の集まり（関数族）を考える．その中の任意の関数 $f(x)$ について，
>
> $$f(x)\ \text{は有界閉区間}\ \mathbb{I}\ \text{で連続である} \implies \int_a^b f(x)\,dx\ \text{は積分可能である}\,.$$
>
> （ただし，この逆（つまり $\Longleftarrow$ 方向）は成り立たない．要注意）

という非常に有用で強い定理がある．ここからは，$f(x)$ は連続であるとして，これを援用していく（定理の証明には．適切な教科書を（よければ [1] をも）参照されたい．またこの定理の証明でも，微分の理論は必要ないことを断っておく）．

さてこの定積分については，次の性質がある（$p,\,q,\,r$ は $a \leq \{p,\,q,\,r\} \leq b$ つまり a と b の間にある点）：

$$(1)\ \int_p^q = \int_p^r + \int_r^q \qquad (2)\ \int_p^q = -\int_q^p$$

(1) は，全体の積分は，部分の積分の和に等しい，ということを示しているものである．$p < r < q$ であるときには非常に納得しやすい事柄であるけれども，$r < p$ のときや $q < r$ のときにも成り立つ性質である（その事実は次の (2) の性質を用いて示すことになる．練習問題としていいかな）．

(2) については上手い説明が思い浮かばないし，そういえば上手い説明をみたこともない．$p < q$ という大小関係を軸にすれば，「積分の方向（？）つまり dx の増える方向と減る方向の積分の値は，符号が逆である」というスローガンで納得しても良いかもしれないし，「符号付き面積」「負の面積」などという言葉を使って諒解してもいいだろう．さらに加えて，$\int_p^p$ は，積分範囲が 1 点のみなので 0 であるという事実と (1) をあわせて

$$\int_p^p = \int_p^q + \int_q^p = 0 \quad \therefore\ \int_p^q = -\int_q^p$$

というようにして納得する，というのもありそうである．

□ 定積分から不定積分へ

さてここでふたたび，$a \leq u \leq b$ である u を一つ採用するとしよう（上の例での c とは文字をかえる．そのこころは変数と見立てたいからである．c だとどうも定数の味がつよい）．すると区間 $[a, u]$ はもとの有界閉区間 $[a, b]$ の部分区間（部分集合）であるから，当然 $f(x)$ も $[a, u]$ で連続である．部分なのだから当然である．したがって，$U := \int_a^u f(x)\,dx$ は積分可能である．さらにまたこの U は，採用した u に依存することもわかる．u が決まれば U が決まるという状態である．これは，「U は u の関数である」ということのあらわれである．図式的に書けば

$$u \ \longmapsto\ U(u) = \int_a^u f(x)\,dx$$

ということである．数学の慣習に則って，関数の変数を x とすることにすれば，上記は

$$x \ \longmapsto\ U(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

となる[*4]．この x で関数化した結果の $U(x)$ を $f(x)$ **の不定積分**と呼んでいるのである．

不定積分のこの導入の形からもわかるように，「積分のしっぽ」にある上の例の a は，定義域の有界閉区間内の点であるのならば，なんでもよいはずである．したがって，$a' \in \mathbb{I}$ を使えば，$\int_{a'}^x f(t)\,dt$ も不定積分であると言って良いことになる．ここで先に見た定積分の性質をつかえば

$$\int_{a'}^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{a'}^a f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \mathrm{Const} = U(x) + \mathrm{Const}$$

[*4] $\int_a^x f(x)\,dx$ でももちろん構わない．ただ，この式内にあらわれている x の役割が違うので，それを x と t で区別した．ここら辺は，大人の書き方などと称した上で，（各方面で口を酸っぱくして）「混同しないでね」と言われている事柄である．

となって，不定積分には定数分の曖昧さ・不定さが存在することがわかる．ま，これはしょうがない事実だ．それゆえ，不定積分を，関数の集まり（関数族）と見る立場もある（高校時代とは大きく違う視点だ）．この「積分のしっぽ」による曖昧さが気に食わない人々は，不定積分を

$$\int^x f(t)\,dt \quad \text{とか} \quad \int f(x)\,dx$$

のように書いたりする．この形式，結構「不定」ということをあらわしている感じがするから，おもしろいものである．ただこの表記だと定積分にルーツがあることが薄まってしまう．一長一短であろうが，それもまたしょうがないか．

微分積分学の基本定理

微分積分学の基本定理を，日本語 wikipedia https://ja.wikipedia.org/wiki/微分積分学の基本定理 での分類をまねて，２つに分けてみていってみよう[*5]．

□ 事柄と記号の整理

まず，今まで見てきたことを整理しておく．

- 定義域とその表記
  - $\mathbb{J}$ は連結[*6] されている領域，すなわち区間をあらわす．
  - $\mathbb{I}$ を，$\mathbb{J}$ の部分区間（部分集合）で，有界閉区間であるものをあらわすとする．
    部分区間であるということは $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{J}$ であるということ．また，有界閉区間であるということは，$a, b \in \mathbb{I},\ a < b$ であるとして，$\mathbb{I} = [a, b]$ というようにあらわされる（今は１次元のみね）．
- 原始関数 $F(x)$
  - $f(x)$ は $\mathbb{J}$ という区間で定義されている関数．
  - $F(x)$ が 区間 $\mathbb{J}$ で微分可能であり，$F'(x) = f(x)$ となるとき，それを原始関数という．
  - 原始関数は無数に存在するが，それらはお互いに定数の差しかない．
    つまり，$F(x) + C$ すべてが原始関数であるということ．もちろん C は定数であれば何でも良い．逆に言えば，定数を除けば原始関数は $F(x)$ に一意に定まる．

  原始関数の性質を導くためには，まずもって，微分の理論の準備が必要である（その中には，微分の平均値の定理も含まれる）．また，$F(x)$, $f(x)$ の定義域は，有界閉区間である必要はない．
- 不定積分 $U(x)$
  - $f(x)$ が有界閉区間 $\mathbb{I}$ で連続であるならば定積分 $\int_a^x f(t)\,dt$ はかならず存在する．
  - 上記定積分を「関数化」した $U(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ を不定積分という．もちろんこれも必ず存在する．
  - 不定積分は無数に存在するが，それらはお互いに定数の差しかない．
    つまり，$U(x) + C$ すべてが不定積分であるということ．もちろん C は定数であれば何でも良い．

  不定積分を定義するためには，定積分の理論の準備がまずもって必要である．けれども，そこには微分の理論は一切必要ない．

この整理のもとで微分積分学の基本定理の紹介と説明にはいっていこうとおもう．

[*5] 当該の wikipedia の記事は，「この記事は検証可能な参考文献や出典が全く示されていないか、不十分です。」と警告されている（2023/10/04 現在）．

[*6] 連結という概念もかなり難解で面倒なものであるのだけれども，ここではそれには深入りしないで，単に区間というものを支える概念であると諒解しておくだけにする．わたくしの学習が足りないからである．

□ 微分積分学の第一基本定理

【微分積分学の第一基本定理】
$f(x)$ は有界閉区間 $\mathbb{I}=[a,b]$ で連続であるとし，かつ，以下の変数 x は $x\in\mathbb{I}$ であるものとする．そうすることによって，不定積分 $U(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ が定義できることを前の節で見てきた．その上で，$f(x)$ と $U(x)$ のあいだには

$$U'(x)=f(x)$$

あるいは，同じことであるけれども表記をかえて

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

という関係が存在する[*7]．すなわち，不定積分は原始関数なのである．

証明の概略を記してみよう．定積分の性質を利用すると，$U(x+\varDelta x)$ は

$$U(x+\varDelta x)=\int_a^{x+\varDelta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt=U(x)+\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt\,,$$
$$\text{i.e.}\quad U(x+\varDelta x)-U(x)=\int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt$$

と計算できる．

この状況のひとつをグラフ化してみた例が図 1 (p.5) ．長方形の横幅を縮小していくことを考えると

$$\varDelta x\to 0\quad のとき\quad \int_x^{x+\varDelta x} f(t)\,dt\ \to\ f(x)\cdot\varDelta x$$

としてよいことになる[*8]．もとの $U(x)$ に戻れば，

$$\varDelta x\to 0\quad のとき\ \begin{cases} U(x+\varDelta x)-U(x)\ \to\ f(x)\cdot\varDelta x \\ \qquad\text{i.e.} \\ \dfrac{U(x+\varDelta x)-U(x)}{\varDelta x}\ \to\ f(x)\end{cases}$$

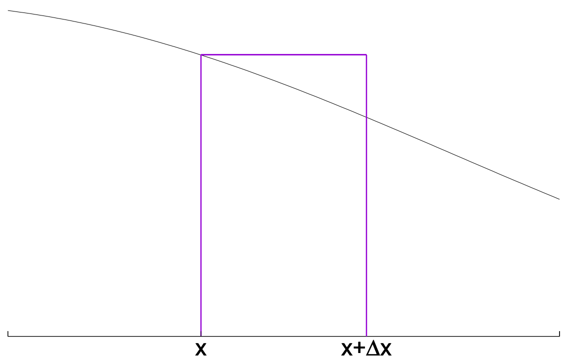

図 1

となる．すなわち

$$U'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{U(x+\varDelta x)-U(x)}{\varDelta x}=f(x)\,.$$

もはやこれは，導関数の定義そのものではないか．以上から $U'(x)=f(x)$，つまり原始関数であることが導き出せたことになる．さらにまた，ここまでの議論を振り返れば，少なくとも $f(x)$ が連続である限り，必ず不定積分 $U(x)$ としての原始関数が存在することもわかった．原始関数の性質の最後のところで一旦据え置いておいた性質 (4) は，このように解決されるのである．

[*7] $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ は，丁寧に書けば $\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt\right\}=f(x)$ である．慣れれば当たり前と思えてくる．不思議である．

[*8] 理由を（あらっぽく）示しておこう．$f(t)$ は区間 $[x,x+\varDelta]$ で連続であるとする．するとこの区間では，$f(t)$ はかならず最大値 M と最小値 m を持つはずである（なぜならば $f(t)$ は連続なのだから）．それゆえ，最大値と最小値が等しい場合も想定すれば，$m\le f(t)\le M$ である．これを $[x,x+\varDelta]$ で定積分すれば，おのおの可積分であるから（積分が収束するといっても良い）大小関係はそのまま保存されて

$$\int_x^{x+\varDelta} m\,dt\ \le\ \int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt\ \le\ \int_x^{x+\varDelta} M\,dt\quad\therefore\ m\varDelta\ \le\ \int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt\ \le\ M\varDelta \tag{1}$$

□ 微分積分学の第二基本定理

次の基本定理に移ろう．第一基本定理を簡単にまとめれば，$f(x)$ が有界閉区間で連続ならば原始関数をもつ，ということだ．それを頭において

【微分積分学の第二基本定理】
$f(x)$ は有界閉区間 $\mathbb{I} = [a, b]$ で連続であるとすると，第一基本定理から，$f(x)$ は原始関数をもつことがいえる．その $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ で代表すると

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

がなりたつ（原始関数を $F(x)$ で代表すると言った意味は，$f(x)$ の原始関数すべてにおいて成立する，ということを言いたかったからである）．

という定理を吟味してみよう．まず第一基本定理から，不定積分 $U(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ は原始関数であった．さらにまたこの $U(x)$ については

$$U(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0, \quad U(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$
$$\therefore \int_a^b f(t)\,dt = U(b) - U(a)$$

がなりたつ．つまり，第一基本定理の不定積分経由で導入された原始関数はこの第二基本定理を満たすことがわかる．一方で，原始関数は，無数あるけれどもそれらは定数分の差しかないことが判明している．不定積分においても，定数分の曖昧さは存在していた．この事実を考えてみると，ひとつ原始関数が求まれば，そのほかの原始関数はそれに適当な定数を加えることですべてあらわし尽くせるということである．よって定理に書いてある原始関数 $F(x)$ は $U(x) + C$ とあらわせることになる．あとは単純な計算で

$$F(b) - F(a) = [U(b) + C] - [U(a) + C] = U(b) - U(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

となる．つまり，どの原始関数をもってきても，この第二基本定理は成立するのである[*9]．

以上で簡略証明は終了．なお，最後の結果の積分では，定理の書き方を尊重して，積分内の変数を t でなく x に書き改めた（誤植ではないですよ）．

となる．あとは，$\varDelta \to 0$ すなわち，$[x, x+\varDelta] \to 0$ としたときのことを考えるだけで良い．この極限では，m と M をそれぞれ区間内における最小値と最大値にしたのだから，$m \to M$ となるべきである．さらに加えて，この極限では $f(x) \to M$（または $f(x) \to m$）であるべきなのだからそれらを合体させると，$m \sim M \sim f(x)$．したがって

$$m\varDelta \;\sim\; \int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt \;\sim\; M\varDelta \quad \therefore \int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt \;\sim\; f(x)\varDelta$$

となるのである，おおざっぱには．

（極限近似を好まない）丁寧な人は，(1) (p.5) の次の展開で．積分の平均値の定理に持ち込むかもしれない（また物騒な定理を持ち込んできた）．(1) (p.5) を $\varDelta$ で割れば

$$m \;\leq\; \frac{1}{\varDelta}\int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt \;\leq\; M$$

となって，積分の平均値の定理から

$$f(c) = \frac{1}{\varDelta}\int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt \quad \text{あるいは} \quad f(c)\varDelta = \int_x^{x+\varDelta} f(t)\,dt$$

となる c が $[x, x+\varDelta]$ に存在することが言える，という流れである．$\varDelta \to 0$ で $c \sim x$ とすれば，本文中の式になる．なお，積分の平均値の定理の概略については，後述する“補遺２ (p.13) ”にまとめた．

*9 この微分積分学の第二基本定理の別の導出方法（Reimann 和と微分の平均値の定理を利用する方法）を，何かの参考になるかもと思い，“補遺３ (p.20) ”に記した．

微分積分学の基本定理を味わう

微分積分学の第一基本定理は,「有界閉区間 $\mathbb{I}$ で $f(x)$ は連続である」(今後この条件を `CFI` と書くことにする)ときには,$a \in \mathbb{I}$ を使って

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

ということを主張していた.ことばで書けば

$$\text{不定積分 } \int_a^x f(t)\,dt \text{ は,} f(x) \text{ の原始関数である}$$

ということを主張していたのである.これは,$f(x)$ と $F'(x)$ という微分の世界にたいして,「不定積分を利用すれば $F(x)$ が作れます」という,ちょっかいというかおせっかいというか,とにかく,**積分世界は,微分世界に貢献できる**という事実を表明しているのである.

微分積分学の第二基本定理は,やはり条件 `CFI` を満たす関数 $f(x)$ と,その原始関数のひとつである $F(x)$ を使えば($a, b \in \mathbb{I}$ でなければならないことも諒解しておく)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ということを主張していた.これは,$\int_a^b f(x)\,dx$ という定積分の世界にたいして,「原始関数を利用すれば定積分が計算できます」という,**微分世界による積分世界への貢献**を表明しているのである.

このようにお互いの貢献の流れを整理したかったので,微分積分学の基本定理を 2 つに分けてみたのでした(なにも wikipedia が分けていたからというだけではないのだよ).

さてこの 2 つの定理,なんか堂々巡りの感も否めない.その感覚の根拠は

> 確かにお互いに逆の演算の関係があることはわかった.ならば,どうやって原始関数を見つけ出すのか,実際どうやって積分するのか?

が判然としない所にあるのだろう.つぎの 2 つのクイズとそれらの答えが,その堂々巡り感をあらわしている:

クイズ 1: $\int_a^b f(x)\,dx$ を求める方法は?
$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が見つかれば,$F(b) - F(a)$ で求まります.

クイズ 2:$f(x)$ の原始関数を求める方法は?
$\int_a^x f(x)\,dx$ は,原始関数のひとつです.ちなみに,原始関数は定数部分を除けば,形式はひとつに定まります.

微分積分学の基本定理から言えることはここまでだろう.そして,上のクイズに答えるためには,不定積分形ではない具体的な原始関数のひとつがわかると話が早い.なので,導関数をもとめる練習問題をたくさんやって,関数と原始関数のペアに馴染んでおくのである.ペアだけでたりない場合には,合成関数の微分やら,置換積分,部分積分などの計算技術を駆使して,微分や積分を行うのである.そうやって大人になっていくのである.

さてここからは,まとめのような能書きである.Darboux の定理から構築される積分世界においては,有界閉区間で関数が有界でさえあれば積分可能,つまり定積分を求めることができることがわかっている.また,条件 `CFI` を満たす $f(x)$ であるならば(つまり `CFI` は十分条件),この $f(x)$ は必ず有界になるので,積分可能であることになり,そこから不定積分を得ることができる.加えて,この不定積分は原始関数のひとつになっているのであった.したがって,連続関数には原始関数関数が存在するということも導かれるのである.ここまでが微分積分の基本定理の範疇である.「連続」という事象(概念?事実?)が仲立ちをし,芯を一本通している感じである.

となると,$f(x)$ が連続関数ならば不定積分,原始関数ともに存在するので,そうでない場合つまり「有界閉区間 $\mathbb{I}$ で不連続な関数 $g(x)$」の場合どうなのだ,ということに興味が湧いてくる.すなわち

- 不連続関数であるけれども原始関数をもつもの（不定積分は持たない）
- 不連続関数であるけれども不定積分をもつもの（原始関数はもたない）
- 不連続関数であるけれども不定積分と原始関数両方を持ち一致するもの
- 不連続関数であるけれども不定積分と原始関数両方を持つが一致はしないもの

というある意味 “病的” な不連続関数をみいだせるのかどうか，という問いが生まれてくるのである．とくに，原始関数と不定積分がともに存在して一致しない，というような関数はどんな関数なんだろうか？

ささやかな具体例

前節の最後にかいた不連続関数の生態の詳細については，今後の学習にゆだねるとして，ここでは 2 つのささやかな計算の具体例を示す．

□ 冪乗多項式関数にはかならず原始関数がある

原始関数が見つかればことたりる．区間 $\mathbb{I}$ で定義されている冪乗多項式関数

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

について（a_i は定数の係数であり，変化する変数ではないとしている）

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} \cdot x^2 + \frac{a_0}{1} \cdot x + C$$

とすれば（C は何らかの定数），あきらかに

$$F'(x) = f(x)$$

であるから $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．これより，冪乗多項式関数は必ず原始関数をもつことがわかった．

□ 原始関数を持つ不連続関数

「$f(x)$ が連続関数，ならば，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が存在する」のであったけれど，この逆，つまり「$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が存在する，ならば，$f(x)$ は連続である」とはいえない．中島本 [2] の例をひく．

実数全体の区間を定義域として，次の $F(x)$ を考える：

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$x \neq 0$ のときには

$$F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

となる．すなわち，$x \neq 0$ であるならば $F(x)$ は微分可能．$x = 0$ の場合については

$$\frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) - 0}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

であり，このとき

$$0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq 1 \quad \therefore\ 0 \leq \left|h \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h|$$

だから，

$$h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \to 0 \quad (h \to 0)$$

と挟み撃ちできる．まとめると，

$$\lim_{h\to\pm 0} \frac{F(0+h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to\pm 0} \left\{ h\sin\left(\frac{1}{h}\right) \right\} = 0$$

となって，$x=0$ でも微分可能で $F'(0)=0$ である．したがって，$F(x)$ は実数全体の区間で微分可能．あらためて

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とすれば，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である，といえる．でも，$f(x)$ は $x=0$ では連続ではない．なぜならば，$\lim_{x\to 0} f(x)$ を考えると，

$$\lim_{x\to 0} \left\{ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right\} = \lim_{x\to 0} \left\{ 0 - (\text{振動}) \right\}$$

となって，収束しない．したがって連続にはならないからである．不連続関数（$f(x)$）であるけれども，原始関数（$F(x)$）は存在するひとつの例がこれである．さてこれは，不定積分が存在すると言えるのだろうか[*10]．

[*10] 本稿での不定積分 $\int^x f(t)\,dt$ は，$f(x)$ が連続であるという前提のもとで考察してきた．そして，この例の $f(x)$ は連続ではないこともわかった．そのときには，不定積分といものをどう考えればいいのか．答えるためには，もう少し勉強しなければならんなぁ．

《補遺１》

本文の “原始関数の性質” のところ (p.2) では

【定理】関数を F 微分した結果（つまり導関数）が 0 である． $\iff$ 関数 F は定数である．

という定理を認めて論を進めてきたところであるが，いい機会なのでこの事実を証明してみる．対象とする関数をとりまく環境を

有界閉区間 $\mathbb{I} = [a, b]$ で定義されている連続な関数で，開区間 $\mathbb{I}_o = (a, b)$ で微分可能な関数の集合[*11] を $\mathbb{F}$ とする．

と整備しておいて，定理を論理式をつかってきちんと書くと

【定理】$f(x) \in \mathbb{F}$ である関数 $f(x)$ について，次の論理式（必要十分条件）が成り立つ：

$$\forall x \in \mathbb{I}_o: \ f'(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{I}: \ f(x) = C \quad (C \text{ は定数}).$$

である．さて，この定理を証明して行きたいのだけれど，そのためには**微分の平均値の定理**が必要になる．そして，微分の平均値の定理の証明のためには**ロルの定理**があると便利である．とまあこのように，ここからさきかなり大掛かりな話になりそうだが，臆せず怯まずで，進めて行きたい．まずロルの定理から片付けていく．

■ ロルの定理

【ロルの定理】$f(x) \in \mathbb{F}$ である関数 $f(x)$ について

$$f(a) = f(b) \implies f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が存在する．

証明.（以下，記号こそ違え，理路はほぼ解析概論 [3, p.47] の写経である（当然あちらの方が洗練度は高い））

$f(x)$ は $\mathbb{F}$ の要素であるのだから，有界閉区間 $\mathbb{I} = [a, b]$ で連続である．したがって，最大値 M と最小値 m が存在し[*12]，$m \leq f(x) \leq M$ である．したがって，考えなければならない場合はつぎの 3 つである（これですべてての場合が列挙されている）：

$$\begin{aligned} &(1) \ \ m = f(a) = f(b) = M \\ &(2) \ \ m \leq f(a) = f(b) < M \\ &(3) \ \ m < f(a) = f(b) \leq M \end{aligned}$$

(1) まず最初に $m = f(a) = f(b) = M$ である場合を考える．$f(x)$ は連続関数なのだから，この条件が成り立つには $f(x)$ は定数関数であるしかない．したがって，$f(x) = C$（C は定数）とあらわせて，導関数の定義を適用すると

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0$$

だから，$a < c < b$ である c についても $f'(c) = 0$ である．

[*11] こういう場合には「関数族」と呼ぶのが良いようだけれども，ここでは関数の集合とさせていただいた．「集合」と「族」という言葉の使いわけについては，おそらくは何らかのルールがあるのだろうけれど，わたくしはよくわかっていない．加えて，ここでは微分可能という事柄を，点 x の「左側」からと「右側」からの両方の微分の極限がとれてそれが一致する，という通常よくある定義として使うことにしている．なので微分可能な区間は $\mathbb{I}_o = (a, b)$ という開区間にしているのである．

[*12] これも由緒正しくいくならば，ボルツァノ－ワイエルシュトラスの定理にまで遡る必要がある．しかしそれをいえば，実数の連続性にまで立ち戻らねばならなくなってくるであろう．ということで，最初の威勢は良かったが，ここら辺でドリルダウンを「収束」させておく．キリがなかろう，というか，そこまで行けば教科書だ．そしてわたくしには教科書は書けません．

(2) 次に，$m \leq f(a) = f(b) < M$ の場合を考える．やはり関数 $f(x)$ の連続性から $a < c < b$ で $f(c) = M$ となる c が存在する．ここで，$h > 0$ として $a < (c-h) < c < (c+h) < b$ という大小関係を考えると，$f(c)$ は最大値としたのだから，$f(c-h) < f(c)$ であり，$f(c+h) < f(c)$ であるはずである．したがって，

$$\{f(c+h) - f(c)\} \leq 0 \quad \therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \quad \therefore f'(c) \leq 0$$

であり[*13]

$$\{f(c) - f(c-h)\} \geq 0 \quad \therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(c)-f(c-h)}{h} \geq 0 \quad \therefore f'(c) \geq 0$$

である．．したがって，挟み撃ち定理から $f'(c) = 0$.

(3) $m < f(a) = f(b) \leq M$ の場合では，$a < c < b$ で $f(c) = m$（最小値）となる c が存在することになる．したがって，この条件のもとで考えていけば，理路は (2) と全く一緒で

$$\{f(c+h) - f(c)\} \geq 0 \quad \therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \quad \therefore f'(c) \geq 0$$

であり

$$\{f(c) - f(c-h)\} \leq 0 \quad \therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(c)-f(c-h)}{h} \leq 0 \quad \therefore f'(c) \leq 0$$

したがって，$f'(c) = 0$，となる．これですべての場合が尽くされたので，めでたく証明が終了したのである．

□

次は，微分の平均値の定理である．

■ 微分の平均値の定理

【微分の平均値の定理】$f(x) \in \mathbb{F}$ である関数 $f(x)$ について

$$a < c < b \quad \text{で，} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

となる c が存在する．

証明． α を実数の定数として

$$g(x) = f(x) - \alpha x$$

という関数を用意しよう．ロルの定理を使うために用意した人工的な関数である．このとき，$f(x) \in \mathbb{F}$ であり $\alpha x \in \mathbb{F}$ でもあるから，$g(x) \in \mathbb{F}$ であることはあきらかだ．ゆえに，$g(x)$ についてロルの定理を使う準備はできている．さて，ロルの定理が使えるためには $g(a) = g(b)$ となることが必要である．つまり α が

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \alpha a \\ g(b) &= f(b) - \alpha b \end{aligned}\right\} \quad \therefore \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

[*13] 若干の注釈を．まず極限をとっても大小関係が保存することについては

$$\{f(c+h) - f(c)\} \leq 0 \implies \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq \frac{0}{h} \implies \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

というように，一旦 $(f(c+h) - f(c))/h \leq 0/h$ を経由していることに注意しよう．この変形は，$h > 0$ としているのだからあたりまえに成立する．そして，f は微分可能であるとしているのだから，$h \to 0$ のときの極限が存在することになっている．極限が存在するから，極限をとっても大小関係が保存されるのである．次の $\{f(c) - f(c-h)\} \geq 0$ の場合も同様である．

次に 2 つの極限がどちらも $f'(c)$ となっていることについて．c で微分可能ということは，「c の左側」から極限をとっても「右側」からとってもどちらも一致するということであるから，問題なし，なのである．納得がいかないのであれば，導関数の定義を思い出しながらこの式変形を味わってみよう：

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c)-f(c-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} = \lim_{k\to 0} \frac{f(c+k)-f(c)}{k} = f'(c) \ \ (k := -h)\ .$$

であればロルの定理が使える．定理を適用すると，$a \neq b$ で $g(a) = g(b)$ となっているのだから，$c \in \mathbb{I}_o$ である c で，$g'(c) = 0$ となる c が少なくともひとつは存在することになる．したがって

$$g'(c) = f'(c) - \alpha = 0 \quad \therefore\ f'(c) = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .$$

□

いよいよ本丸である．

■ 導関数が 0 であることと原始関数は定数関数であることは同値である，という定理

【定理】$f(x) \in \mathbb{F}$ である関数 $f(x)$ について，次の論理式（必要十分条件）が成り立つ：

$$\forall x \in \mathbb{I}_o:\ f'(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{I}:\ f(x) = C \quad (C\ \text{は定数}).$$

必要十分条件になっていること（つまり同値な論理式であること）に注目である．

証明． まず，（簡単な）$\Longleftarrow$ から．導関数の定義を忠実になぞれば，定数関数の導関数は 0 となることが示される（蛇足だけれども，この説明から，定数関数は微分可能であることも導き出されている）．実際に定数関数を $f(x) = C$ とすれば，区間 $\mathbb{I}_o = (a, b)$ においては

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0$$

であるから，この区間での定数関数の導関数は 0 である．

つぎに $\Longrightarrow$ 方向．これはちとややこしい．まず $f'(x) = 0$ であると仮定する．ここで $f(x)$ が定数関数**でない**ならば（後々で背理法の仮定として利用する仮定である），$f(p) \neq f(q)$ $(p < q)$ をみたす p, q （ただし，$p, q \in \mathbb{I}$，つまり定義域区間内の点要素）が存在するはずである．この p, q の決め方から，有界閉区間 $[p, q]$ も当然定義域に含まれており，かつこの有界閉区間で微分可能である．それゆえ微分の平均値の定理から，

$$f'(c) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}$$

となる $p < c < q$ が存在することになる．そしてこのとき，$f(p) \neq f(q)$ であるのだから，$f'(c) \neq 0$ となる．これは最初の仮定「$f'(x) = 0$」を満たさない．つまり矛盾している．この矛盾は $f(x)$ が定数関数でないとしたことから引き起こされている．それゆえ，$f(x)$ は定数関数でなければならないのである． □

微妙な部分であるところを補足しておこう．上記の理路は，$f(x)$ が $\mathbb{I}_o = (a, b)$ で微分可能であることから，$x \in \mathbb{I}_0$ であるならば，$f(x) = C$ であるということを言っている．確かにその通りであるが，では $x = a$ または $x = b$ の場合も C であると言って良いのだろうか．

ここで

> $\alpha, \beta, \varepsilon$ は任意の実数であるとする．このとき、α と β が等しい（$\alpha = \beta$）ということは、次の論理式で表される：
>
> $$\forall \varepsilon > 0:\ |\alpha - \beta| < \varepsilon \implies \alpha = \beta$$

という事柄を思い出そう．したがって，$x \in (a, b)$ で $f(x) = C$ であるのならば，$f(a) = C$ として構わないのである．$f(b) = C$ も同様[*14]．

[*14] この少々面倒な微妙さを避けるために，あらかじめ大きな区間 $\mathbb{J} = [p, q]$ $(p < a,\ b < q)$ を用意し，この $\mathbb{J}$ で連続で微分可能と仮定してしまって，その上で $\mathbb{I} = [a, b]$ で証明を試みればよかったかもしれない（4 ページでの定義のように）．

《補遺２》

積分の平均値の定理は，その証明において中間値の定理を利用する．その事情についてもここで簡単にまとめておこうと思う．

■ 中間値の定理

【中間値の定理】$f(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で定義されている連続な関数であって[*15]，さらに $f(a) \neq f(b)$ であるとき

(1) $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の μ について，$a < c < b$ で，かつ，$f(c) = \mu$ となる c が存在する．

同値な事柄であるが，この定理は次のようにも表現できる．

(2) $x \in [a,b]$ の範囲で $f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間の値すべてをとる．

この定理は，有界閉区間で定義された連続関数が持つ，基本的で典型的な性質を示す定理である．いまからこの定理の証明を試みようと思うのだが，数学の世界では往々にして「一般性を失わない」という注釈のもとで，証明が見通し良くなるよう条件を微妙に変化させてことに臨むことがよくある．ここでもそのように進めていこうと思ったのだけれども，たまに「ほんとうに一般性は失われていないのだろうか」と悩むこともあるので（少なくとも筆者にはよくあることなので），定理を増やして定理間の関係をあらわすことによって，見通しがよくなるように試みる．

まず次の定理を用意してその証明から入る．

【中間値の定理の系】$g(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で定義されている連続な関数であって，さらに $g(a) < 0 < g(b)$ であるとする．このとき

$$a < c < b \text{ で，かつ } g(c) = 0$$

となる c が存在する．

定理の証明の肝は，連続であることの表現としてどのようなものを採用するかにある，といってもあながち間違いではないだろう．

証明． 毛色の違う３種類の証明を書いてみる．

(1) 有界な単調数列を用いる方法（ [4] の写経）

3 個の数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，各々の初項を $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ として考える．ここで，考え方を，次のように「帰納的思考」にスイッチする．つまり，第 n 項 a_n, b_n, c_n が定まったとして

$$g(c_n) > 0 \quad \text{であるとき} \quad a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n,\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$g(c_n) < 0 \quad \text{であるとき} \quad a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n,\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

と定義するのである．この意味合いは，区間 $[a,b]$ の２等分割からはじまって，

$$g(c_n) > 0 \text{ のときには } [a_n, b_n] \text{ の左半分を } [a_{n+1}, b_{n+1}] \text{ とする}$$
$$g(c_n) < 0 \text{ のときには } [a_n, b_n] \text{ の右半分を } [a_{n+1}, b_{n+1}] \text{ とする}$$

[*15] N.B. 微分可能性は要求されていない．けれども，連続関数であれば成立するのだから，もちろん微分可能な関数についても成立する定理である，といまさらのようにあたりまえのことを書く．

というものである（上手い図が描けるといいのだが）．なおこのときには，右と左の差はあれ，順次 2 分割を繰り返しているのだから，

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b_{n-3} - a_{n-3}}{2} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

となっている．

$g(c_n) = 0$ のときはどうなるかというと，その c_n が定理が求める c であるので，c の存在が示せ証明終了ということになる．

さてこのとき，すべての n に対して $g(c_n) \neq 0$ であるならば，

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots b_2 \leq b_1$$
$$\text{であり，かつ}$$
$$g(a_n) < 0, \quad g(b_n) > 0 \quad (\text{for all } n)$$

ということになる．この事実は，数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は上に有界な単調増加数列，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は下に有界な単調減少数列である，ということを物語っている．それゆえ，どちらの数列も収束する．その収束値を

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

と置こう．すると，

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \beta - \alpha$$

であり，一方で $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ であったから

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$$

となるので $\beta = \alpha$ となる．ここで $c := \beta\,(= \alpha)$ とすれば $g(x)$ の連続性から

$$g(c) = g(\beta) = g\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(b_n) \geq 0$$
$$g(c) = g(\alpha) = g\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) \leq 0$$

となる．この結果は，$g(c) = 0$ という事実を意味している．

以上から，$c = \beta = \lim_{n\to\infty} b_n\ (= \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n)$ という $a < c < b$ を満たす c の存在が言えて，かつ，その c については $g(c) = 0$ となっていることが示されたのである．

(2) 区間縮小法を用いる方法（ [5] の写経）

基本戦略は (1) と同じであるが，区間 $\mathbb{I}$ の表現に工夫をし，前面に出す戦術である．

手始めを $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\mathbb{I}_1 = [a_1, b_1]$ とし，帰納的に $\mathbb{I}_n = [a_n, b_n]$ を考えていくところは (1) と同様である．その際，$c_n = (a_n + b_n)/2$ と決めて

$$\mathbb{I}_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, c_n] & (g(c_n) > 0) \\ [c_n, b_n] & (g(c_n) \leq 0) \end{cases}$$

とすれば，$\mathbb{I}_{n+1} \subset \mathbb{I}_n$ という部分集合の関係にあることがわかる．それゆえ区間の幅もどんどん狭まっていっている．

以上から，列 $(\mathbb{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，有界で単調な減少数列であることが言える．すると区間縮小法が使えて*16

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}_n = \{\, c \,\}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

という結果，つまり $a < c < b$ という c の存在が得られる．

*16 区間縮小法の考え方とその結果についての説明と証明はサボる（やはりドリルダウンにキリがないなぁ）．ただ，イメージするだけであればそう難儀なものではない（と思うのだけれど）．

残るは，すべての n について $g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$ となっていることを示すのみであるが，これには数学的帰納法が使える．実際，$n=1$ のときは，そもそもの前提から $(g(a_1)=g(a)) \leq 0 \leq (g(b_1)=g(b))$ という具合に成立している．$n=k$ のときにも成立している，つまり，$g(a_k) \leq 0 \leq g(b_k)$ であるとしよう．そのとき，$g(c_k) > 0$ ならば

$$\mathbb{I}_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k] \quad \therefore\ g(a_{k+1}) = g(a_k),\ \ g(b_{k+1}) = g(c_k)$$

だから，数学的帰納法の仮定と $g(c_k) > 0$ という場合分けの条件から

$$\{g(a_{k+1}) = g(a_k)\} \ \ \leq \ \ \{g(b_{k+1}) = g(c_k)\}$$

となる．同様にして $g(c_k) \leq 0$ のときには

$$\mathbb{I}_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k] \quad \therefore\ g(a_{k+1}) = g(c_k),\ \ g(b_{k+1}) = g(b_k)$$

よって数学的帰納法の仮定と $g(c_k) \leq 0$ という場合分けの条件から

$$\{g(a_{k+1}) = g(c_k)\} \ \ \leq \ \ \{g(b_{k+1}) = g(b_k)\}$$

となって，$n=k+1$ のときにも成立している．したがって，数学的帰納法の論理から，$g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n)$ が常に成立することが示された．この結果において $n \to \infty$ を考えると，区間縮小法の結果を使えば $a_n \to c,\, b_n \to c$ であるので

$$g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n) \quad \to \quad g(c) \leq 0 \leq g(c)$$
$$\therefore\ g(c) = 0\ .$$

$<$ と $\leq$（$>$ と $\geq$）を巧みに使い分けることによって $g(c_k) = 0$ の場合も上手に繰り込まれている．

(3) 上界，上限を用いる（ [3] の写経）

(1)，(2) とはまったく異なる，上限の性質から導き出す華麗な論法である．さすが解析概論，と言いたくなるけれども，自身でこの理路を考え出せるかというと，その自信はまったくない．以下，その理路をなぞる．

$g(a) < 0$ ということから，a の極近く（近傍という言葉がある）では，$g(x) < 0$ である．その $g(x) < 0$ となっている区間を $[a, \xi]$ としよう．ξ に焦点を当てて言い換えれば，$[a, \xi]$ で常に $g(x) < 0$ とする ξ が存在するのである．したがってもちろん $g(\xi) < 0$ である．

ここで ξ のとりうる範囲の有界性を確認しておく．いまは，$g(b) > 0$ であり，$g(x)$ は $[a, b]$ で連続なのであるから，$\xi < b$ であることがわかる．つまり，ξ は上に有界である（あきらかなことではあろうが）．そしてその上限を c とすれば，$g(c) = 0$ でなければならなくなる．

なぜならば，かりに $g(c) < 0$ であるとすれば，c は $[a, \xi]$ の「内部」にあることになって，c の意味つまり ξ の上限という意味に反する（$c < \xi$ となってしまうのだから．ξ が上限を超えてしまう．これは上限の意味定義に反する）．

またもし $g(c) > 0$ であるならば，十分ちいさな ε にたいして $g(c-\varepsilon) > 0$ で，$[a, \xi]$ の右端 ξ は $c - \varepsilon$ を超えない．これも c が ξ の上限としたことの意味に反する（$c - \varepsilon$ が上限になってしまう）．

故に $g(c) = 0$[*17]．

□

さて，【中間値の定理の系】の証明は完了した．前述したように，これももちいて本題の【中間値の定理】の証明に入ろうと思う．今一度各々の定理の骨格を記すと

【中間値の定理】$f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で定義されている連続な関数であって，さらに $f(a) \neq f(b)$ であるとき

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の μ について，$a < c < b$ で，かつ，$f(c) = \mu$ となる c が存在する．

[*17] 煙に巻かれた感がないとは言えないけれど，「連続」という概念に精通したお見事な論法であると思う．さすが高木貞治，というところでしょうか．

【中間値の定理の系】$g(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で定義されている連続な関数であって，さらに $g(a)<0<g(b)$ であるとき

$$a<c<b \text{ で，かつ } g(c)=0$$

となる c が存在する．

であった．

いま，区間 $[a,b]$ で定義されている連続関数 $f(x)$ をもちいて，$\mu \neq f(a)$ を前提とし人為的に

$$g(x)=\frac{f(x)-\mu}{\mu-f(a)}$$

という関数を考えてみると

$$g(a)=\frac{f(a)-\mu}{\mu-f(a)}=-\frac{\mu-f(a)}{f\mu-f(a)}=-1 \quad < \quad 0$$

である．この形から，$f(x)$ が連続関数であるだから，$g(x)$ も連続関数になっていることがみて取れる．そして μ が $f(a)$ と $f(b)$ の間にあるものとすると

$$g(b)=\frac{f(b)-\mu}{\mu-f(a)} \quad > \quad 0$$

である[*18]．したがって，この $g(x)$ は

$$\text{連続関数であり } g(a)<0<g(b) \text{ である}$$

ということになって，【中間値の定理の系】が適用できる関数になっている．したがって，$a<c<b$ で $g(c)=0$ となる c が存在することが言える．そして，$g(x)$ の定義に立ち戻れば，

$$g(c)=\frac{f(c)-\mu}{\mu-f(a)}=0 \qquad \therefore\ f(c)=\mu$$

となる．つまり以上によって，【中間値の定理】が導出できたのである．シンボリックに書けば

$$\text{【中間値の定理の系】} \Longrightarrow \text{【中間値の定理】}$$

ということになる．

また逆に，【中間値の定理】において，$\mu=0$ として，

$$g(x):=\begin{cases} f(x) & (f(a)<f(b) \text{ のとき}) \\ -f(x) & (f(a)>f(b) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と $g(x)$ を定めれば，【中間値の定理の系】そのものが導出できるから

$$\text{【中間値の定理】} \Longrightarrow \text{【中間値の定理の系】}.$$

以上をあわせると

$$\text{【中間値の定理の系】} \Longleftrightarrow \text{【中間値の定理】}$$

---

*18 この結果が心配であれば，場合分けという高等戦術にでればいい．$f(a)<\mu<f(b)$ であるときには

$$g(b)=\frac{f(b)-\mu}{\mu-f(a)} \quad > \quad 0$$

はあきらか．$f(b)<\mu<f(a)$ であるときには

$$g(b)=\frac{f(b)-\mu}{\mu-f(a)}=\frac{\mu-f(b)}{f(a)-\mu} \quad > \quad 0$$

となる．心配は解消される．

ということになって，この２つの定理が同値であることが判明したのである．みためは，【中間値の定理の系】は【中間値の定理】の特別な場合のようであるけれども，実態はそうではなくてれっきとした同値な定理であったのだった．そしておそらく，この同値であるという事実を見通した上で，「一般性を失うことなく」というエクスキューズをいれて微妙に条件を変化させて証明する，という行為がなされるのではあるまいか，そう思った．

最後に【中間値の定理】の (2) に触れておこう．(1) では，μ は「$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の μ」 であった．つまり μ の候補は $f(a) < \mu < f(b)$ となるすべての実数であり，その各々の μ に対応して $\mu = f(c)$ となる c が存在するという主張であった．なので，c を変数と見立て x であらわすと

$$f(a) < f(x) < f(b) \quad \text{となる } x \text{ が存在する}$$

ということになる．これを言い換えれば

$x \in (a, b)$ で，$f(x)$ の値として，$f(a)$ より大きく $f(b)$ より小さいすべての値を与える x が存在する

ということになる．これに $x = a,\ x = b$ の点も付け加えれば (2) の定理そのものになる．

なお，注意しておきたいことは（ここでは説明を簡単にするために $f(a) < f(b)$ とする），「$\forall x \in [a, b]$ で $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ である」ということでは**ない**ことだ．単調増加関数であれば確かにそうなるけれども，増加と減少を繰り返すような関数では，$x \in [a, b]$ で，$f(x) < f(a)$ であったり，$f(b) < f(x)$ となったりすることもあるのである（図 2 (p.18)，および図 3 (p.18) でおおまかなイメージは掴めると思う）．主張の骨幹は，「$f(a)$ 以上 $f(b)$ 以下の実数は，$x \in [a, b]$ の範囲の x を使えば $f(x)$ ですべて賄える」ということである．

■ 積分の平均値の定理

微分の世界に「平均値の定理」があるように，積分の世界にも次のような「平均値の定理」がある．ただし，定理の対象とする関数 $f(x)$ には

$$\left.\begin{array}{l} (a)\ \ f(x) \text{ は有界閉区間 } [a, b] \text{ で積分可能な関数である} \\ (b)\ \ m \leq f(x) \leq M \end{array}\right\} \tag{2}$$

という条件がつく（有界閉区間での関数の上限を M，下限を m とあらわした）．この条件のもとで，定理は次のように２つの内容をもってあらわされる：

【積分の平均値の定理】$f(x)$ は条件 (2) (p.17) を満たす関数であるとする．

(1) $\lambda = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\,,\ \ m \leq \lambda \leq M\,,$ となる λ が存在する．

(2) $f(x)$ が連続であるときには，$f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\,,\ \ a < c < b\,,$ となる c が存在する．

証明． さっそく証明に入ろう．

- (1) の証明．
  有界閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ は積分可能と仮定してあり，また，定数関数も積分可能であるから

$$\begin{aligned} m \quad &\leq \quad f(x) \quad \leq \quad M \\ \therefore\ \int_a^b m\,dx \quad &\leq \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \leq \quad \int_a^b M\,dx \\ \therefore\ m(b-a) \quad &\leq \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \leq \quad M(b-a)\,. \end{aligned}$$

  したがって

$$\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

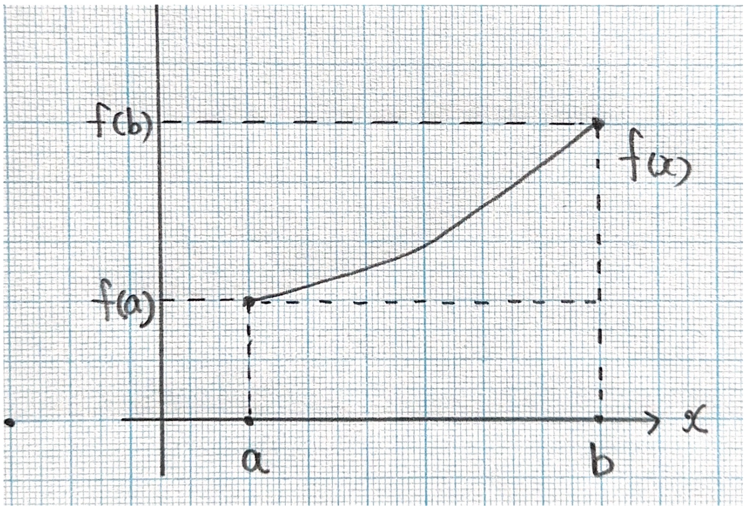

図 2: 単調増加関数でのイメージ

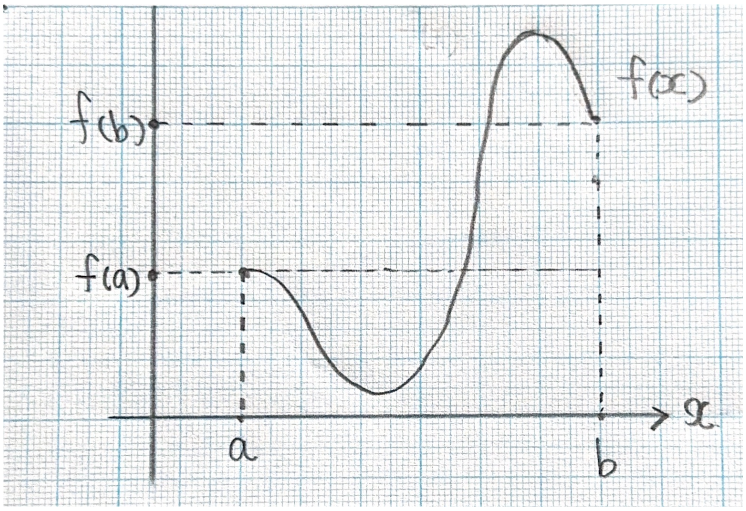

図 3: 増加と減少を繰り返す関数のイメージ

とすれば

$$m \;\le\; \lambda \;\le\; M\,.$$

- (2) の証明.

  $f(x)$ が連続であるとするのだから，準備してきた中間値の定理が使える．ただ，使えるといっても，そのまま（教条的に）つかえるわけではなく，(1) の結果を混ぜ合わせて利用する[*19].

  関数 $f(x)$ を連続としたのであるから，$[a,b]$ での下限 m は最小値でもある．その最小値を与える $[a,b]$ 内の点を p としよう．すなわち $m=f(p)$．同様に上限 M は最大値になり，その最大値を与える $[a,b]$ の点を q とする．つまり $M=f(q)$．したがって (1) の結果は

  $$m \;\le\; \lambda \;\le\; M \iff f(p) \;\le\; \lambda \;\le\; f(q)$$

  とあらわせる．この結果は,「p と q で決まる区間」(p と q の大小関係はわからないから，このように書いた）に λ が存在するということを言っているから，ここに中間値の定理を適用する．すなわち,「p と q で決まる

[*19] 証明を最後まで追えばあきらかなことであると思うし，図 4 (p.19) からもあきらかであるけれど，注記しておこう.「教条的」に中間値の定理を適用すれば（いったんここでは $f(a)<f(b)$ とする），$f(a)<\lambda<f(b)$ で $\lambda=f(c)$ となってしまうが，(1) の結果は $m\le\lambda\le M$ であった．そのときもし $m<f(a)$ であったとすると，λ は $f(a)<\lambda<f(b)$ をはみ出てしまう（満たさない）可能性があることになる．$f(b)<M$ のときも同様．なので，直接 $f(a)$ と $f(b)$ を持ってくることはできず，一旦 $m=f(p)$, $M=f(q)$ を経由して中間値の定理を利用しなければならないのである（わたくしはこのことに気が付かず，一瞬戸惑ったことを告白しておく）.

区間」内に $f(c)=\lambda$ となる c が存在することが，中間値の定理から言えるのである．それゆえまず第一に，

$$f(c)=\lambda=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad (c \text{ は 「} p \text{ と } q \text{ で決まる区間」内にある})$$

ということになる．その上で，p も q も $[a,b]$ 内にあるのだから上の言明の区間を拡張して

$$f(c)=\lambda=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad (a<c<b)$$

となって，証明が終わるのである．

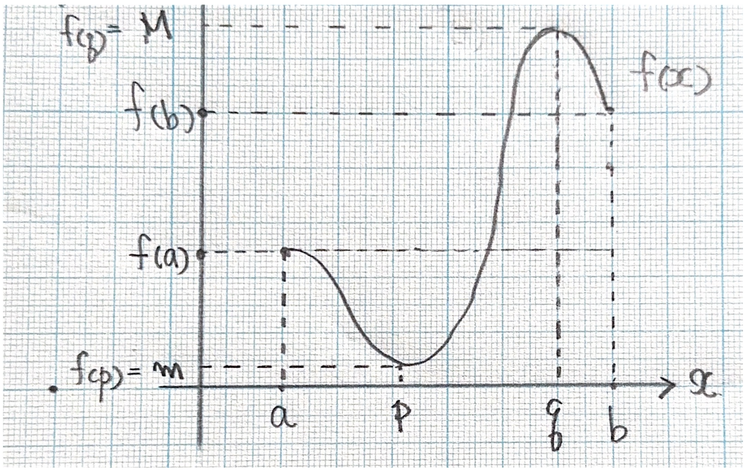

図 4: 証明を補足するためのサンプルグラフ

□

定理の形から見られるように，区間 $[a,b]$ の定積分（値）をその区間の幅（長さ）で割っている．いわば「長さでの平均」をとっていることになるので，平均値の定理と呼ばれるのであろう．

《補遺３》

微分積分学の第二基本定理のよくある通常の導出を，（以前にも何処かに書いた気がするのだけれど）ここにも記しておく．導出の流れは

> Reimann 和の種となる，分割された長方形による関数の近似を考える ⇒ 原始関数の存在を認めて微分の平均値の定理を使い，長方形の高さを求める ⇒ Reimann 和を計算する ⇒ 微分積分学の第二基本定理に行き着く

というものになっている．

図 5 (p.20) は，区間 $[a, b]$ での関数 $f(x)$ と，それを長方形で近似した，Reimann 和の種をあらわしたものであると諒解して欲しい．ここで分割と区間の幅を

- 区間を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ と n 分割する（等幅でなくても良い）
- i 番目の区間の幅を $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ と表記する

とあらわす．さらに，Δx_i の区間の長方形の高さを，ひとまず h_i とあらわす．まだその値はわからないけれども，とにかく h_i としておくのである．そうすることによって，$[a, b]$ でのすべての長方形の面積の和は，$\sum h_i \Delta x_i$ となる．

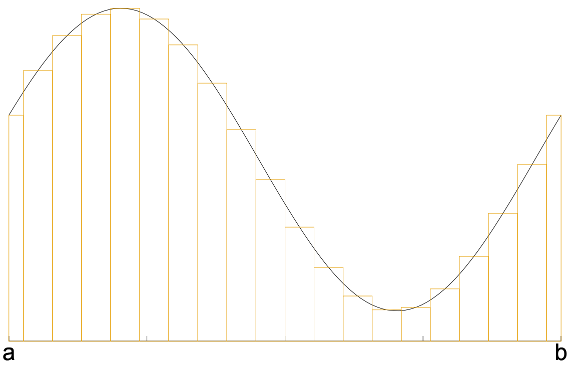

図 5: Riemann 和のイメージ．各長方形の幅が Δx_i.

そして，どこからかはわからないが，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ をもってくる．原始関数の存在を先に認めてしまうのである．そのうえで天下り的に微分の平均値の定理をう．微分の平均値の定理によれば，

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i)$$

となる c_i が区間 Δx_i の中に存在することが保証される．$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であることを利用すれば，

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i) \qquad \therefore\ F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

である．さてここで，c_i は区間内に存在することがあきらかなので，それを長方形の高さの決定に利用する．つまり，$h_i = f(c_i)$ とするのである．そして Riemann 和 $S = \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i$ を計算すると，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \Big) \quad \text{（途中のものが相殺されて）} \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

となる．ここまでの理路では，区間の分割になんの条件もなかった．ただ区間を分割して長方形作れば良いだけなのであった．つまり，区間の分割の個数や分割幅がいかようであっても，上式は成立するものなのである．

たとえば極端な例として，「分割しない」区間の分割を考えてみる．つまり，分割が $x_0 = a$, $x_1 = b$, $\Delta x_1 = b - a$ のみである場合である．すると，やはり原始関数の存在と微分の平均値の定理から

$$F(b) - F(a) = f(c_1)(b - a)$$

となる $f(c_1)$ が存在するので，

$$S = \sum_{i=1}^{1} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)(x_1 - x_0) = f(c_1)(b-a) = F(b) - F(a)$$

なのである．つまり，原始関数の存在と微分の平均値の定理を承認してしまえば，分割の仕方によらずつねに $S = F(b) - F(a)$ なのだ．そう，賢明なかたは「微分の平均値の定理」の「平均」という意味にここで気づくはずだ．長方形の高さ h_i を平均値の定理の結果である $F'(c_i) = f(c_i)$ とすることによって，上下凹凸が「平均化」されるのである．なので,「平均値」の定理.

じゃあ定積分ってなんだ？ Reimann 和を基礎にして定式化する流儀では，分割の極限をとった場合の Reimann 和であると定義して，

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

とするのである．そして原始関数 $F(x)$ が存在するときには，分割によらず $S = F(b) - F(a)$ であるのだから，分割の極限 $\lim S$ においても

$$\lim_{n\to\infty} S = F(b) - F(a)$$

すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

となる．くどいけれど，微分の平均値の定理のおかげで，分割の仕方によらず $F(b) - F(a)$ なのである*20.

*20 高瀬 [6] の 152 ページから 156 ページにかけて,「微分積分学の基本定理」についての説明と著者の考えが述べられている．ここの言説は，示唆に富んでいると思う．

しめくくり

なんだか，本文よりも補遺の分量の方が多くなってしまった．解析の基本的な定理を記述するのは，いつものことだが，骨が折れる．さて，色々なところで関数が連続である，ということを利用してきたが，そもそもこれは実数の連続性があってはじめて言える事柄である．そして田島の本 [7, p.67] によれば

- デデキントの公理（実数の切断）
- 区間縮小方＋アルキメデスの公理
- 有界な単調数列の収束
- 上限下限の存在

はすべて実数の連続性を示す同値な表現なのである，とのこと．さらに小島の本 [8, pp.70-73] では，上記に加えて

- 平均値の定理

も同値であると言っている（本稿とは流儀が違うけれども，「リーマン積分の基本原理」も同値であると言っている）．なるほどね，と思うこともしばしばである．

ともかく，原始関数と不定積分というものの生い立ちにすこしばかり触れることができたように思う．また，これら各々は，微分と積分の世界で分離独立であるということもわかった．そして，関数の連続性という性質を通して，有機的な結びつきができることもわかった．それが「微分積分学の基本定理」である．関数が有界閉区間で連続のときのみ，「微分積分学の基本定理」が成り立つのである．留意しておきたい．

ちなみに，原始関数の英語表記に，antiderivative というものがある．これは気持ちがいい表記だ．primitive function という英語表記もあるらしいが，どうもこれは無味乾燥すぎてあんまり面白くない．不定積分の方は，indefine integral．日本語の「不定積分」は直訳のまま定着したのだろう．こちらもちょいと味気ない．

ここまで付き合っていただき，感謝です，ありがとう．

Contents

原始関数と不定積分という２つの用語 1

原始関数の性質 1

不定積分の性質 2

微分積分学の基本定理 4

微分積分学の基本定理を味わう 7

ささやかな具体例 8

《補遺１》 10

《補遺２》 13

《補遺３》 20

しめくくり 22

参考文献

[1] 久島 広幸. 『Darboux の定理による積分世界の構築』. https://www.hisasima.jp/studynote/darboux.pdf, 2023/11.
[2] 中島 匠一. 『なっとくする微積分』. 講談社, 2001. (第 3 刷 (2004) を参照した).
[3] 高木 貞治. 『解析概論』. 岩波書店, 改訂第三版, 1961. (第 19 刷 (1977) を参照した).
[4] 黒田 紘敏. 『微分積分学入門』. http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf, 2023.
[5] 杉浦 光夫. 『解析入門 I』. 東京大学出版会, 1980. (第 38 刷 (2022) を参照した).
[6] 高瀬 正仁. 『dx と dy の解析学—オイラーに学ぶ』. 日本評論社, 増補版, 2015.
[7] 田島 一郎. 『イプシロン–デルタ』. 共立出版株式会社, 1978. (第 59 刷 (2018) を参照した).
[8] 小島 寛之. 『ゼロから学ぶ微分積分』. 講談社, 2001. (第 16 刷 (2014) を参照した).